Note Title 10/17/2010

Relazioni di ordine.

Def Dato un insieme A, si prende $A \times A$

Un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ è detto

"Relazione di ordine parziale su A"

se

1) $(x, x) \in \mathcal{R}$ $\forall x \in A$ Riflessiva ($x \leq x$)

Antisimm. 2) $(x, y) \in \mathcal{R}$ & $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$ $\forall x, y \in A$ ($x \leq y$, $y \leq x$)

Transitiva 3) $(x, y) \in \mathcal{R}$ & $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ $\forall x, y, z \in A$

Questa relazione di ordine R viene detta

"Relazione di ordine totale su A"

se valgono 1), 2), 3) e

4) $\forall x, y \in A \quad (x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$

Esempio Su $\mathbb{N}$ la relazione "$\leq$" è una relazione di ordine totale

Controesempio Preso l'insieme delle parti di A $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

La relazione "$\subseteq$" è di ordine parziale ma non totale

Oss Avere un ordine è essenziale per definire $\min A$ $\max A$

Oss A e si prende $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$(\mathbb{P}(A), \subseteq)$ $\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

$A = \{1, 2, 3\}$ $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\forall B \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq B$!! <u>ok</u>

$\forall B, C \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq C \;\&\; C \subseteq B \Rightarrow B = C$!! <u>ok</u>

$\forall B, C, D \in \mathbb{P}(A) \qquad B \subseteq C \subseteq D \Rightarrow B \subseteq D$!! <u>ok</u>

ma $\quad \{1\} \not\subseteq \{2\} \qquad \{2\} \not\subseteq \{1\}$

$\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

Insieme numeri naturali $\mathbb{N}$

Def Esiste un insieme $\mathbb{N}$ e una applicazione $\boxed{\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}}$ $\sigma(n) = n+1$ "successore"

1) $0 \in \mathbb{N}$ l'insieme è non vuoto

2) $m \neq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sigma(m) \neq \sigma(n)$ Iniettività σ

3) $0 \neq \sigma(0)$ per avere ∞ elti

4) Se $S \subseteq \mathbb{N}$ t.c. • $0 \in S$ (base ind.) $\Longrightarrow S = \mathbb{N}$

• $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq S \Rightarrow \underset{n+1}{\underset{\shortparallel}{\sigma(n)}} \in S$

Principio di induzione

Principio Buon Ordinam.

Teorema (Teorema minimo intero)

$A \subseteq \mathbb{N} \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, \bar{m} = \min A$

dim

Se $0 \in A$ allora $\exists\, \bar{m} = 0 = \min A$

Se $0 \notin A$, allora $\boxed{0 \in \mathbb{N} \setminus A}$

Ora se $\{0, \dots, m\} \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$?

(1) $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ $\implies \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$

$\{0, \dots m\} \in \mathbb{N} \setminus A \implies m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

significa che $A = \emptyset$ <u>Assurdo</u>

② $n+1 \in A$ & $n \in \mathbb{N} \setminus A$

allora $n+1 = \bar{n} = \min A$ ▨

dim

Si consideri $\mathbb{N} \setminus A$

- $\mathbb{N} \setminus A \ni 0$: altrimenti $0 = \min A$!!
- $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ e $n \in \mathbb{N} \setminus A \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

(se così non fosse, $n+1 \in A$ e cioè $n+1 = \min A$)

Ma per il P.I. si ha $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ <u>Assurdo</u> ▨

Proviamo che

Teorema: Se $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ $\exists \min A$ allora vale Principio Induzione

dim

Supponendo $A \subseteq \mathbb{N}$: $0 \in A$; se $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq A$ allora $(n+1) \in A$

Tesi $A = \mathbb{N}$ | Tesi eq $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$

per assurdo $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min(\mathbb{N} \setminus A) = m$, con $m \neq 0$ ($0 \in A$ x Hp)

Ma allora $\exists n \in A$ t.c. $n+1 = m$ (il predecessore)

Ma per ipotesi se $(n \in A) \Rightarrow n+1 = m \in A$ assurdo ($m \in \mathbb{N} \setminus A$)

Quindi $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$ assurdo $\Longrightarrow A = \mathbb{N}$

Principio di induzione (2ª forma)

Se $S \subseteq \mathbb{N}$ è tale che

- $\boxed{\overline{n}} \in S$ (base induzione)
- $\{\overline{n}, \dots, n\} \in S \Rightarrow n+1 \in S$

$\Longrightarrow S = \{\overline{n}, \overline{n}+1, \dots\}$

Def $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \overline{n}$ è definita (x induzione) come

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Esercizio

$$0+1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 0$$

dim

Verifico che vale per $n=0$

$$0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad \checkmark$$

Suppongo valga $0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vale per n)

devo provare che vale per $n+1$

cioè

$$\exists \quad 0+1+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\text{ma } \underbrace{0+1+\dots+n}+n+1 \overset{\text{Hip. Ind.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Vale per $n=0$ (o $n=\bar{n}$)

Suppongo valga per n (generico)

dimostro vale per $n+1$

Proviamo a "ricavare" (non dimostrare) il perché

$$0+1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$0+1+\cdots+200 = S'$$

$$200+199+\cdots+0 = S'$$

$$\underbrace{200+200+\cdots+200}_{\substack{\| \\ 200\cdot(200+1)}} = 2S'$$

$$0+1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme progressioni geometriche

IMPORTANTISSIMO

(ricavare)

Calcolare $1+q+q^2+\dots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

dove $q \in \mathbb{R}$

dim

$S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n}$

$$q S_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + q^3 + \cdots + \cancel{q^n} + q^{n+1}$$

$$S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n (1-q) = 1 - q^{n+1} \implies q \neq 1 \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Quando $q = 1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1} = n+1$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{se } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{se } q \neq 1 \end{cases}} \quad (*) \quad \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$$

Dimostriamo, per induzione, la formula $(*)$

$n=0$ $\quad S_0 = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \overset{\checkmark}{=} \begin{cases} 0+1=1 & q=1 \\ \dfrac{1-\cancel{q}}{1-\cancel{q}} = 1, & q \neq 1 \end{cases}$

$n=1$ (non serve per la dim!!)

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} q^k = q^0 + q^1 = 1+q \overset{\checkmark}{=} \begin{cases} 1+1 & q=1 \\ \dfrac{1-q^2}{1-q} = 1+q & q \neq 1 \end{cases}$$

Hp. induttive

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{Hp}{=} \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}}$$

Ts

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k \overset{Ts}{=} \begin{cases} n+2 & q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$q = 1 \qquad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 1^k = n+2$

$q \neq 1 \qquad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{} + q^{n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

Applico ipotesi induttive $\longrightarrow$ $= \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}}{1-q} \qquad \overline{\oint} \quad T\!\!/\!\!/\!\!A$$

Teorema $f: A \to A$ una funzione ed $a \in A$

le formule $\begin{cases} g(0) = a \in A \\ g(n+1) = f(g(n)) \end{cases}$

definisce una funzione $g: \mathbb{N} \to A$

dim

Verifichiamo che il $\boxed{CE(g) = \mathbb{N}}$. Sia $S = CE(g)$

•) $0 \in S$. •) Se $\{0, \dots, n\} \in S$, allora si può calcolare

$g(n) \in A \implies$ posso calcolare $f(g(n)) = g(n+1) \Rightarrow (n+1) \in S$

$g(1)\, g(2) \dots$ e dunque $S = \mathbb{N}$ ∎

Esercizio

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Da fare

Oss che differenza c'è tra dim e costr

$n!$ $\qquad 1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2 \cdot 1! \qquad 3! = 3 \cdot 2!$

Definire "ricorsivamente" la funzione $n!$

Sia $f(n) = n!$

$$f(n) \underset{\text{Def}}{=} \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio (Disuguaglianza di BERNOULLI)

$\forall n \geq 0$ e $\forall x > -1$ $\quad (1+x)^n \geq 1+nx$

dim

base induzione
$n=0$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x = 1$$

Se $n=1$ (non serve x la dim) $\quad (1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x = 1+x$

Se $n=2$ (//) $\quad (1+x)^2 = 1+x^2+2x \geq 1+2x$

Hip induttive $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\boxed{\text{Ts} \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x}$$

ip. indutt.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$1+x>0$

$$= 1+nx+x+nx^2 \quad (nx^2 \geq 0)$$

$$\geq 1+(n+1)x \quad \blacksquare$$

Esercizio $\forall n \geq 2 \quad 2^n + 4^n \leq 5^n$

Esercizio $\forall n \geq 6 \quad n^n \geq 2^n \cdot n!$

P_n = permutazione di n el.ti

= numero di modi in cui posso ordinare n elementi

1 elemento ; $P_1 = 1$

2 elementi ; $P_2 = 2$

3 elementi $P_3 = 6$

4 " $P_4 = 24$

- - - -

n elementi $P_n = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$n=1$ è vero (Base induz)

Hp induttiva $P_n = n!$

Ts $P_{n+1} = (n+1)!$

$$\underbrace{\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \dots \quad \boxed{n}} \qquad\qquad (n+1)$$

$\forall$ sequenza di n elementi, posso inserire l'elemento $(n+1)$-esimo in $n+1$ modi

$$\Rightarrow P_{n+1} = n+1 \cdot P_n = (n+1)!$$

Esempio in quanti modi possono essere smazzate 32 carte?

$$\underline{\underline{32!}}$$

Disposizioni senza ripetizione: $D_{n,k}$

In quanti modi $\neq$ possiamo disporre k ($\leq n$) oggetti scelti tra un insieme di n oggetti

Esempio $\triangle$ $\square$ $\bigcirc$ $\star$ 4 elementi

$D_{4,2}$ vogliamo tutte le "parole" di 2 elementi

△ □   □ ○   ○ ☆

△ ○   □ ☆

△ ☆

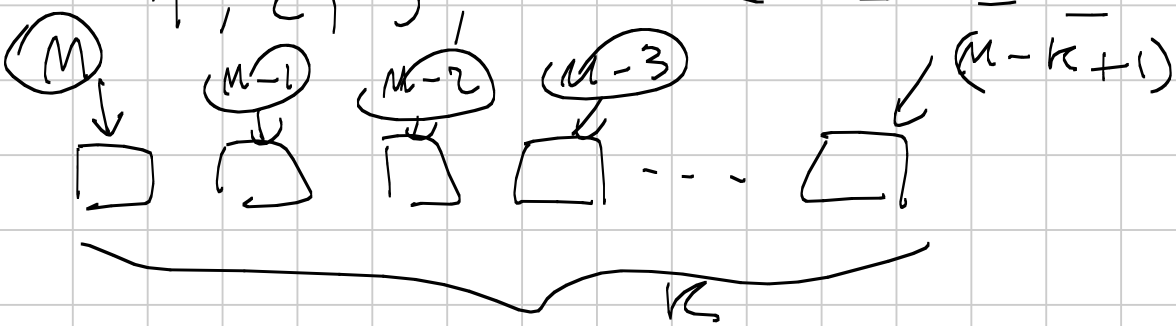
$\boxed{6} \times 2$

In generale $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$= (n-k+1)(n-k+2)\ldots n!$

Alfabeto n elementi

$1, 2, 3, \ldots\ldots n$



Numero di "parole" formate da k lettere a partire da un alfabeto di n $(n \geq k)$ lettere sono $D_{n,k} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Combinazioni : $C_{n,k}$

In quanti modi possiamo scegliere ($\underbrace{\text{senza badare all'ordine}}$) k ($\leq n$) oggetti da un'insieme di n oggetti

<u>Esempio</u>

5 elementi $1, 2, 3, 4, 5$

voglio $C_{5,2}$

dim

1,2   2,3   3,4   4,5

1,3   2,4   3,5

1,4   2,5

1,5

$$\boxed{10 = C_{5,2}}$$

$$D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20$$

Però la disposizione $(1,2) \neq (2,1)$

$(1,3) \neq (3,1)$

$$C_{5,2} = \frac{D_{5,2}}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

Oss $C_{n,k}$ = numero di sottoinsiemi di k el.ti da un insieme di n el.ti

__Oss__ $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!}$

__Oss__ $C_{n,k}$ = n.ro sottoinsiemi di k el.ti da un insieme di n el.ti

$D_{n,k} > C_{n,k}$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Def Coefficiente Binomiale

Nom k $\binom{n}{k} = \begin{cases} C_{n,k} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Oss $\forall n \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$

Dalla def. $\forall k \notin \{0, \dots, n\}$ $\binom{n}{k} = 0$ $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

Dalla Def $\forall k$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

$$\overset{!}{=} \qquad \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{Z}\quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Esercizio: si tratta di scrivere, utilizzando la def., e poi sommare

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^k b^{2-k}$$

$$= \binom{2}{0}a^0\cdot b^2 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^2b^0$$

$$= 1 \cdot b^2 + \frac{2!}{1!\,1!} a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^2 \cdot 1$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k}$$

Teorema (Binomio di Newton)

Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Si fa per induzione, ricordandolo di isolare primo e ultimo termine

dim

$n=0$ $\quad (a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 \cdot a^0 b^0$
$= 1$

Hp induttiva $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\boxed{\text{Ts}} \quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

Hp. Ind.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} + \binom{n}{0} \cdot b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \underbrace{- - - - -} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

In 1 cambio l'indice "muto" k

$i = k+1 \qquad k=0 \longrightarrow i=1$

$k = i - 1$

$k = n - 1 \longrightarrow i = n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{i} b^{n-(i-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{i} b^{n-i+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} \underline{a^{i} b^{n-i+1}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \underline{a^{i} b^{n-i+1}} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a^{i} b^{n-i+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right]$$

$$+ \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a^{i} b^{n-i+1} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^{i} b^{n+1-i}$$

Probabilità di un evento (finita) $\equiv \dfrac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibile}}$

Esercizio Probabilità di fare 6 al superenalotto $= \dfrac{1}{90 \times 89 \times 88 \times \dots \times 85}$

$= 2{,}231 \cdot 10^{-12}$

dim

1, 2, 3, 4 90

Esercizio In quanti modi posso disporre $n+2$ palline, n blu e 2 rosse, in modo che al primo e all'ultimo posto vadano palline blu

(si comincia con $n=2, 3, 4 \ldots$)

Esercizio Dati tutti i numeri di 4 cifre,

a) quanti hanno le cifre disposte in ordine ↗

b) " " 2 cifre pari e due dispari

Tutte $\neq$

(è importante notare che sono tutte $\neq$)

Def $\mathbb{Z} \equiv$ Numeri interi relativi

$$\equiv \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Oss Insieme totalmente ordinato secondo "$\leq$"

Oss $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è

commutativa
associativa
ha elemento neutro
ha inverso

<u>Domanda</u>: cosa mancava in $\mathbb{N}$?

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ era ben definita?