Lezione di Lunedì 18 ottobre 2010

Titolo nota 14/10/2010

La funzione modulo (o valore assoluto)

La funzione modulo

$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ così definita

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

$$|-1| = \max\{-1, -(-1)\} = \max\{-1, 1\} = 1$$

Oss: In molti testi si trova

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$|3| = \max\{3, -3\} = 3$$

$$|-\pi| = \max\{-\pi, -(-\pi)\} = \pi$$

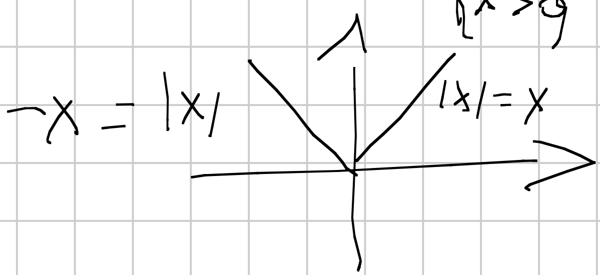
Def $f : A \to B$ una funzione
e sia $\Omega \subseteq A$
diciamo "restrizione di f a Ω"

la funzione $f_{|\Omega}(x)$ definita come

$$\forall x \in \Omega \quad f_{|\Omega}(x) = f(x)$$

$$f_{|\Omega} : \Omega \longrightarrow B$$

Dunque $|x|_{|\{x>0\}} \equiv x$ è $|x|_{|\{x\leq 0\}} \equiv -x$ e dunque



$\forall x \in \mathbb{R}$

1 $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

Se $x \geq 0$ allora $x \geq -x$

allora $|x| = \max\{x, -x\}$

$= x$

allora $|x| = x$ allora $|x| \geq x$

Se $x < 0$ allora $x < 0 < -x$

allora $|x| = \max\{x, -x\} = -x$

allora $|x| > x$

2 $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Se $x > 0$ allora $-x < 0 < x$ allora

$|x| = \max\{x, -x\} = x$

Se $x < 0$ allora $x < 0 < -x$

allora $|x| = \max\{x, -x\} = -x$

3 $|x| = 0 \iff x = 0$

$\max\{0, -0\} = 0$!!!

4 $|x| = |-x|$

$|x| = \max\{x, -x\}$

$|-x| = \max\{-x, x\}$

5 $|x| \geq 0$

$|x| = \max\{x, -x\}$ ma x o $-x$ sono ≥ 0 !!

6 $-|x| \leq x \leq |x|$

proprietà 1

$-|x| = -\max\{x, -x\} \leq x \leq \max\{x, -x\}$

Osservo che $-\max\{x, -x\} = \min\{x, -x\} \leq x$

7 $|x| \le y \iff -y \le x \le y$

$$\Updownarrow$$

$\max\{x, -x\} \le y$

$$\Updownarrow$$

$x \le y \quad \& \quad -x \le y$

$$\Updownarrow$$

$x \underline{\le} y \quad \& \quad x \underline{\ge} -y$

8 $|x| \geq y \iff (x \geq y)$ or $(-x \geq y)$

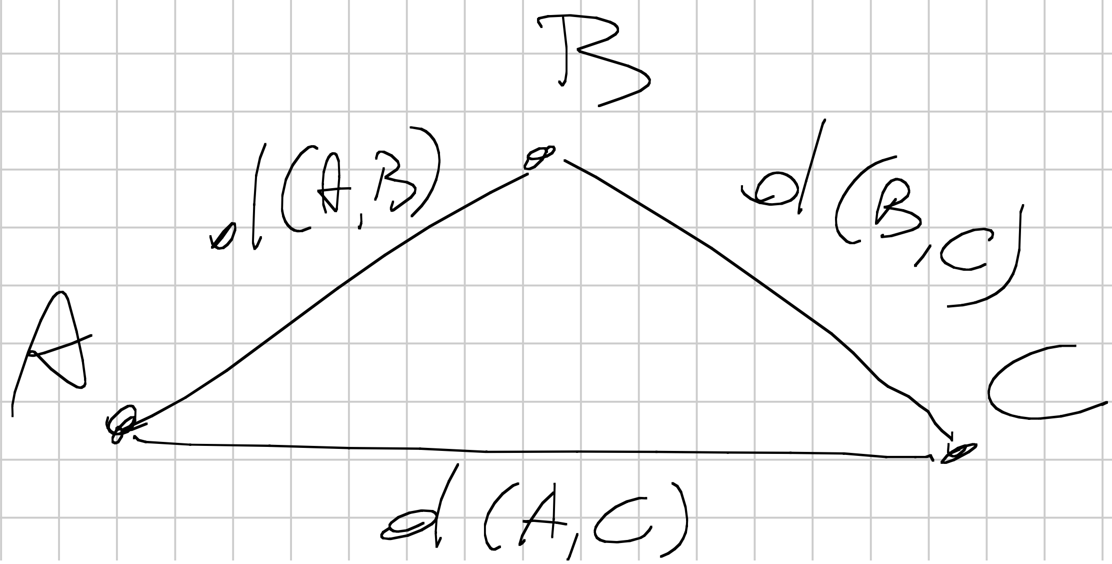
$$\Updownarrow$$

$$\max\{x, -x\} \geq y$$

$$\Updownarrow$$

$x \geq y$ or $-x \geq y$

$$d(A,C)$$
$$\leq$$
$$d(A,B) + d(B,C)$$



9 **Teorema**

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Disuguaglianza Triangolare

$$-|x| \le x \le |x| \quad \leftarrow \quad 6$$

$$-|y| \le y \le |y| \quad \leftarrow$$

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y| \quad \leftarrow \quad 7$$

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

10 Teorema $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$;

$$|x| = |(x-y)+y| \overset{(9)}{\le} |x-y| + |y|$$

$$|y| = |(y-x)+x| \le \underbrace{|y-x|}_{= |x-y|} + |x|$$

II

$$|x|-|y| \le |x-y|$$

$$\big(|y|-|x| \le |x-y|\big) \qquad -\big(|x|-|y|\big) \le |x-y|$$

II

$$|x|-|y| \le |x-y|$$

$$-|x-y| \le |x|-|y|$$

$$\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \quad \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$$

Osservazione importante:

$|x-y| = d(x,y)$ = distanza di x da y sulla retta reale

Come vedremo

Introdurre una distanza su un insieme $\Longrightarrow$ poter definire l'intorno di un punto

$\Downarrow$

Costruire la nozione di limite.

Ma qui sorge un dubbio:

in $\mathbb{R}^2$, ovvero nel piano cartesiano, dati $P \equiv (x_1, y_1)$ e $Q \equiv (x_2, y_2)$ si ha che la distanza euclidea tra P e Q

$$= \boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Ma allora, se si prendono $R \equiv (x_R)$, $S \equiv (x_S)$ due punti sulla retta reale, dovrò avere

$$d(R,S) = \sqrt{(x_R - x_S)^2} = |x_R - x_S|$$

Esercizio

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

dim

Comunque si fissi x,

$$x^2 = (-x)^2 = |x|^2$$

e quindi $\cancel{\sqrt{x}}$, $\sqrt{x^2}$ ha senso.

- Se $x \geq 0$ allora $\sqrt{x^2} = x$ (Ricordiamo che $a = \sqrt{b}$ se $a^2 = b$)
- Se $x < 0$ allora $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$

Quindi $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

ma si sa che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

da cui segue la Tesi $\blacksquare$

Esercizio

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dim

Per definizione, $|x| = \max\{x, -x\}$

Il caso $x=0$ è banalmente vero, perciò consideriamo $x \neq 0$.

- Se $x>0$ allora $-x<0$ allora $\max\{x,-x\}=x$
- Se $x<0$ allora $-x>0$ allora $\max\{x,-x\}=-x$

da cui segue

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } -x<0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Esercizio (Disuguaglianza Triangolare)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

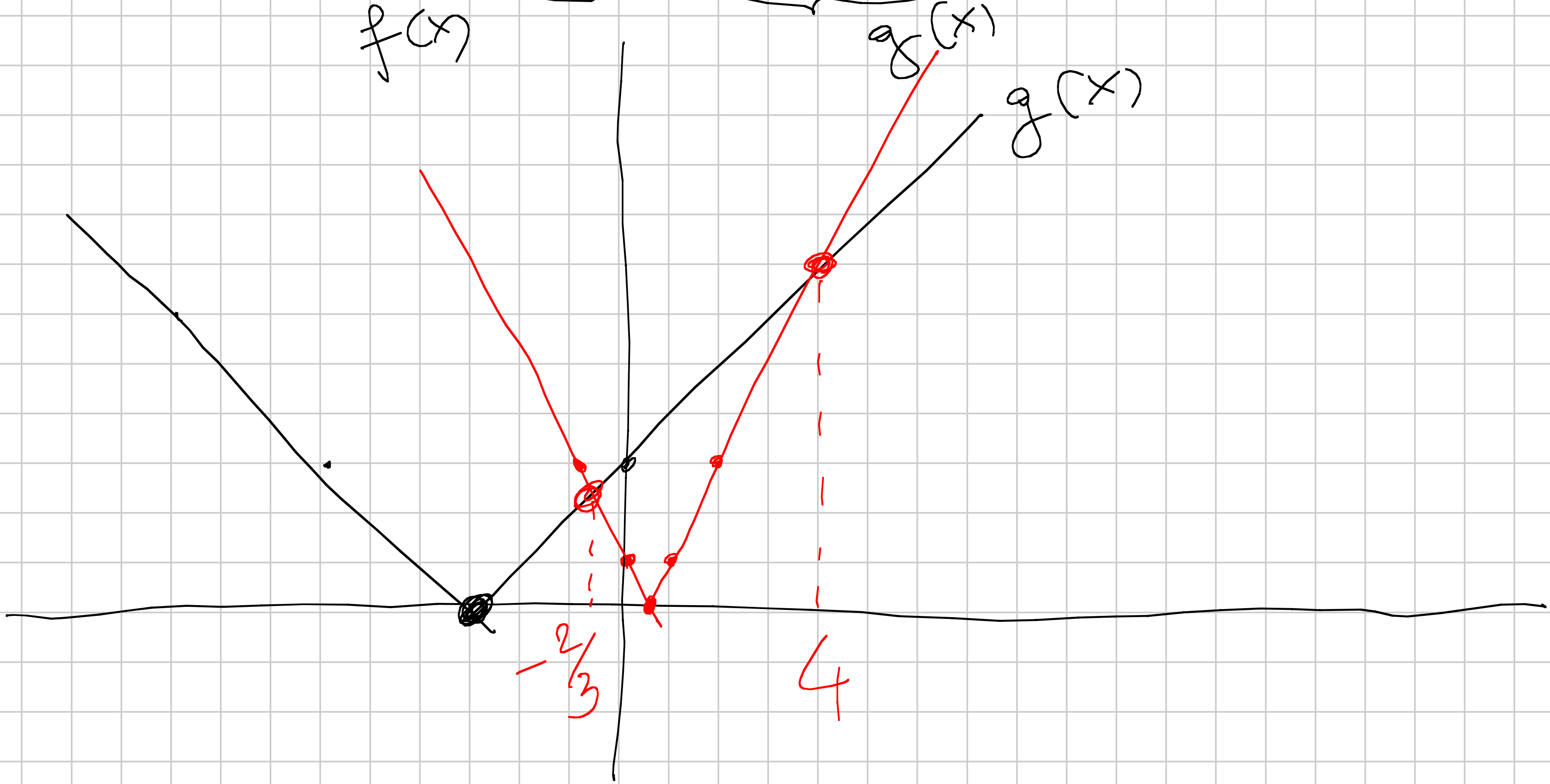
dim

Si è provato che $|a+b| \leq |a| + |b|$, da cui segue che, posto $a = x-z$ $b = z-y$, si ha

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| \quad \blacksquare$$

Esercizio: Per quali valori di x si ha

$$\underbrace{|2x-1|}_{f(x)} = \underbrace{|x+3|}_{g(x)}$$



$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = |x+3| \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ -2x+1 = |x+3| \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 2x-1 = x+3 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+3 < 0 \\ 2x-1 = -x-3 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ x+3 \geq 0 \\ -2x+1 = x+3 \end{cases}$$

$$o \quad \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ x+3 < 0 \\ -2x+1 = -x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ x \geq -3 \\ \boxed{x = 4} \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ x < -3 \\ 3x = -2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x < 1/2 \\ x \geq -3 \\ 3x = -2 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x < 1/2 \\ x < -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1/2 \\ x \geq -3 \\ \boxed{x = -2/3} \end{cases}$$

__Esercizio__ Per quali valori di x si ha

$$x^2 - 2|x| + 1 > 0$$

__dim__

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$x \neq \pm 1$$

<u>Esercizio</u> Per quali valori di x si ha

$$|2x - |x^2-3|| < 1$$

dim

$$\iff -1 < 2x - |x^2-3| < 1$$

$$\iff -1-2x < -|x^2-3| < 1-2x$$

$$\iff \underbrace{1+2x > |x^2-3|}_{(1)} > 2x-1$$

$$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \iff \begin{cases} |x^2-3| < 1+2x \\ |x^2-3| > 2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1-2x < x^2-3 < 1+2x \\ x^2-3 > 2x-1 \end{cases}$$

$$|x^2-3| = \max\{x^2-3, -(x^2-3)\}$$

o

$$\begin{cases} -1-2x < x^2-3 < 1+2x \\ -x^2+3 > 2x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1-2x < x^2-3 \\ x^2-3 < 1+2x \\ x^2-3 > 2x-1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} -1-2x < x^2-3 \\ x^2-3 < 1+2x \\ -x^2+3 > 2x-1 \end{cases}$$

Esercizio Per quali valori di x si ha

$$|x| \cdot x < 2$$

Note Title 10/17/2010

Relazioni di ordine.

Def Dato un insieme A, si prende $A \times A$

Un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ è detto

"Relazione di ordine parziale su A"

se 1) $\overset{x \le x}{(x,x)} \in \mathcal{R} \quad \forall x \in A$ Riflessiva

Antisimm 2) $\overset{x \le y}{(x,y)} \in \mathcal{R}$ & $\overset{y \le x}{(y,x)} \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y \quad \forall x,y \in A$

Transitiva 3) $(x,y) \in \mathcal{R}$ & $(y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R} \quad \forall x,y,z \in A$

Questa relazione di ordine $\mathcal{R}$ viene detta

"Relazione di ordine totale su A"

se valgono 1), 2), 3) e

4) $\forall x, y \in A \quad (x,y) \in \mathcal{R}$ o $(y,x) \in \mathcal{R}$

Esempio Su $\mathbb{N}$ la relazione "$\leq$" è una relazione di ordine totale

Controesempio Preso l'insieme delle

parti di A $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

La relazione " $\subseteq$ " è di ordine

parziale ma non totale

Oss Avere un ordine è essenziale

per definire $\min A$ $\max A$

Oss A e si prende $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$(\mathbb{P}(A), \subseteq)$ $\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

$A = \{1, 2, 3\}$ $\mathbb{P}(A) = \{\phi, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\forall B \in \mathbb{P}(A)$ $\quad B \subseteq B$!! <u>ok</u>

$\forall B, C \in \mathbb{P}(A)$ $\quad B \subseteq C \;\&\; C \subseteq B \Rightarrow B = C$!! <u>ok</u>

$\forall B, C, D \in \mathbb{P}(A)$ $\quad B \subseteq C \subseteq D \Longrightarrow B \subseteq D$!! <u>ok</u>

ma $\quad \{1\} \not\subseteq \{2\}$, $\quad \{2\} \not\subseteq \{1\}$

$\subseteq$ è di ordine parziale ma non totale

Insieme numeri naturali $\mathbb{N}$

__Def__ Esiste un insieme $\mathbb{N}$ e una applicazione $\boxed{\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}}$ $\sigma(n) = n+1$ "successore"

1) $0 \in \mathbb{N}$ l'insieme è non vuoto

2) $m \neq n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sigma(m) \neq \sigma(n)$ Iniettività σ

3) $0 \neq \sigma(0)$ per avere ∞ elt.

4) Se $S \subseteq \mathbb{N}$ t.c. • $0 \in S$
• $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq S \Rightarrow \sigma(n) \in S$
$\Longrightarrow S = \mathbb{N}$

Principio di induzione

Teorema (Teorema minimo intero) **Principio Buon Ordinam.**

$A \subseteq \mathbb{N} \quad A \neq \emptyset \implies \exists\, \bar{m} = \min A$

dim

Se $0 \in A$ allora $\exists\, \bar{m} = 0 = \min A$

Se $0 \notin A$, allora $\boxed{0 \in \mathbb{N} \setminus A}$

Ora se $\{0, \dots, m\} \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$?

① $m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$ allora $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ $\implies \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$

$\{0, \dots, m\} \in \mathbb{N} \setminus A \Rightarrow m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

significa che $A = \emptyset$ <u>Assurdo</u>

(2) $n+1 \in A$ & $n \in \mathbb{N} \setminus A$

allora $n+1 = \bar{n} = \min A$ $\square$

dim

Si consideri $\mathbb{N} \setminus A$

- $\mathbb{N} \setminus A \ni 0$: altrimenti $0 = \min A$!!
- $0 \in \mathbb{N} \setminus A$ e $n \in \mathbb{N} \setminus A \Longrightarrow n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$

(se così non fosse, $n+1 \in A$ e cioè $n+1 = \min A$)

Ma per il P.I. si ha $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ Assurdo $\blacksquare$

Proviamo che

<u>Teorema</u> Se $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ $\exists \min A$ allora vale Principio Induzione

dim

Supponendo $A \subseteq \mathbb{N}$: $0 \in A$.
Se $\{0, 1, \dots, n\} \in A$ allora $(n+1) \in A$

Tesi $A = \mathbb{N}$ | Tesi eq $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$

<u>Xass</u> $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min(\mathbb{N} \setminus A) = m$, con $m \neq 0$ $(0 \in A \text{ x Hip})$

Ma allora $\exists n \in A$ t.c. $n+1 = m$ (il predecessore)

Ma per ipotesi se $(n \in A) \Rightarrow n+1 = m \in A$ assurdo $(m \in \mathbb{N} \setminus A)$

Quindo $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$ assurdo $\Longrightarrow A = \mathbb{N}$

Principio di induzione (2ª forma)

Se $S \subseteq \mathbb{N}$ è tale che

- $\boxed{\bar{n}} \in S$
- $\{\bar{n}, \dots, n\} \in S \Rightarrow n+1 \in S$

$\Longrightarrow S = \{\bar{n}, \bar{n}+1, \dots\}$

Def $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ è definito (x induzione) come
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Esercizio

$$0+1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 0$$

dim

Verifico che vale per $n=0$

$$0=\frac{0(0+1)}{2}=0 \quad \checkmark$$

Suppongo valga $0+1+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (vale per n)