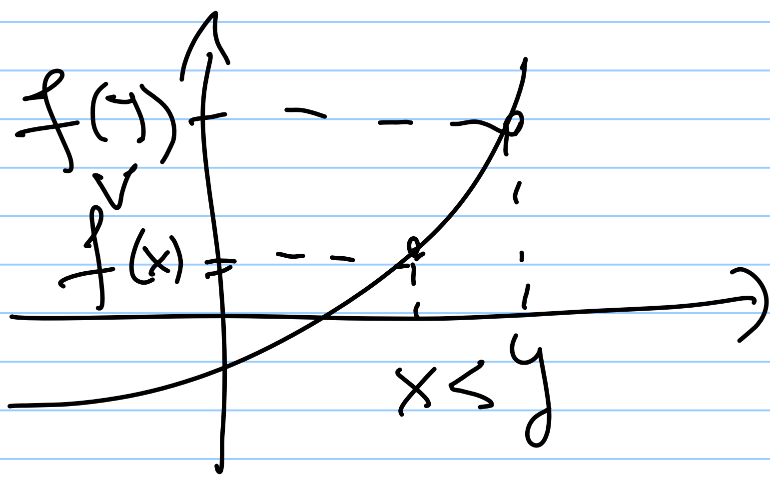
Lezione 2 giovedì 14 ottobre 2010 h 10,30 ÷ 12,30

Titolo nota 13/10/2010

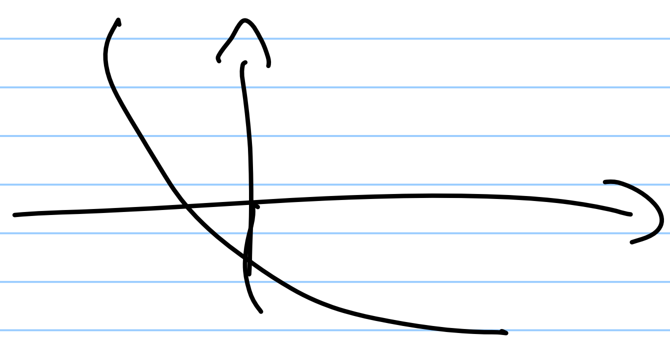
Disequazioni logaritmiche ed esponenziali

Def $f : A \longrightarrow B$ si dice che f è crescente se $\left[\forall x, y \in A \quad x < y \Downarrow f(x) < f(y)\right]$



Oss Se $x < y$ in A ed f crescente allora $f(x) < f(y)$ ovvero f mantiene (conserva) l'ordine

Def $f : A \to B$ è decrescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$



Oss in questo caso l'ordine è invertito

Oss. Essendo le f.ne e^x e $\log_e x$ crescenti,

$$\left[e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7\ldots \right]$$

Si ha che

$$e^{f(x)} > e^{g(x)} \quad \text{se} \quad f(x) > g(x)$$

Se e^x è crescente allora $\left[f(x) < g(x) \Rightarrow e^{f(x)} < e^{g(x)} \right]$

Se $\log_e x$ è crescente allora

$$e^{f(x)} < e^{g(x)} \Longrightarrow \log e^{f(x)} = f(x) < \log e^{g(x)} = g(x)$$

Conclusione: Per studiare una disequazione esponenziale (logaritmica) ci si riduce a studiare una disequazione razionale (algebrica)

Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni

a) $(25)^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x}$

b) $2\log(3x-2) < 2\log x + \log 4$

dim

a) $(25)^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x}$

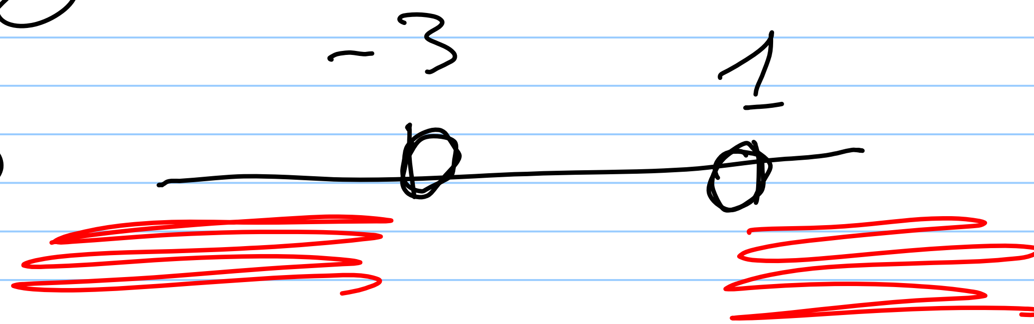
$$5^{10-2x^2-12x} = (25)^{5-x^2-6x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x^2-4 > 5-x^2-6x$$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x-9>0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3>0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)>0$



$x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

b) $2\log(3x-2) < 2\log x + \log 4$ $\Leftrightarrow$

$\log(3x-2)^2$

$\wedge$

$\log x^2 + \log 4$

C.E. $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x>0 \end{cases}$

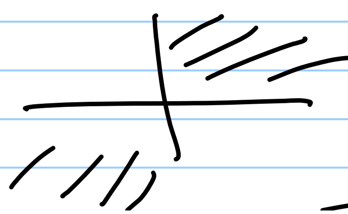
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2/3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{CE \quad x > 2/3} \ (*)$$

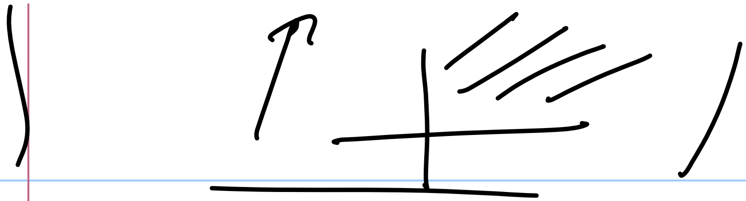
$$\Leftrightarrow \cancel{2}\log(3x-2) < \cancel{2}\log x + \cancel{2}\log 2 \quad (*)$$

$$\log\frac{x}{y} > 0$$

$$\boxed{\log x - \log y > 0}$$

C.E. $\dfrac{x}{y} > 0$





$$\iff \log(3x-2) < \log 2x \quad (*)$$

$$\iff 3x-2 < 2x \quad (*)$$

$$\iff x-2 < 0 \quad (*)$$

$$\iff x < 2 \quad (*)$$

$$\iff x \in \left]-\infty, 2\right[\cap \left]\tfrac{2}{3}, +\infty\right[$$

$$\iff x \in \left]\tfrac{2}{3}, 2\right[$$

Oss. $\boxed{f(x) > 0}$ ogni disequazione in 1 variabile è di questo tipo

Va sempre studiato (determinato il C.E.(f)

Def $f: A \to B$ è debolmente crescente se $\left[\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\right]$

conserva l'ordine?

NO, infatti $f(x) = 0$ è debolmente crescente ma non conserva nessun ordine

Disequazioni irrazionali

Sono le disequazioni del tipo

a) $\sqrt{f(x)} < g(x) \quad (\leq)$

b) $\sqrt{f(x)} > g(x) \quad (\geq)$

c) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \quad (\geq \text{ o } \leq)$

a) $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(C.E.)

Esercizio: per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la disequazione

(1) $\sqrt[7]{7-x} < x-1$

dim

CE $\quad 7-x \geq 0$ $\qquad$ CE: $]-\infty, 7] \ni x$

$$(1) \iff \begin{cases} x \in]-\infty, 7] \\ 7-x < (x-1)^2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 7] \\ x^2 - 2x + 1 + x - 7 > 0 \end{cases} + x > \underline{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 7] \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases} + x > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 7] \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} + x > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 7] \\ x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 7] \cap \left( ]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left( ]-\infty, 7] \cap]-\infty, -2[\right) \cup \left( ]-\infty, 7] \cap]3, +\infty[\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]3, 7] + x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]3, 7]$$

b) $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{array} \right. \quad (C.\subseteq.) \quad \cup \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right.$$

Esercizio: Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la disequazione

$$\sqrt{1-x} > 1-3x$$

dim

$$\left\{\begin{array}{l} 1-x \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \\ \boxed{1-x > (1-3x)^2} \ (*) \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} 1-x \geq 0 \\ 1-3x < 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \in \left]-\infty, 1\right] \\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \\ x \in \left]0, \frac{5}{9}\right[\end{cases} \cup \begin{cases} x \in \left]-\infty, 1\right] \\ x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[\end{cases}$$

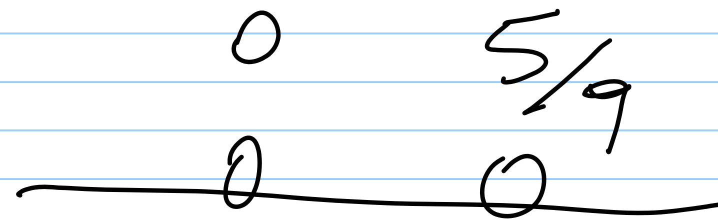
$$\left]0, \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$x \in \left]0, 1\right]$$

$(*)\quad 1-x-(1+9x^2-6x)>0$

$-9x^2+5x>0$

$-x(9x-5)>0$



$x \in \left]0, \frac{5}{9}\right[$

2

c) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Esercizio: determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente disequazione

$$\sqrt{7-x} > \sqrt{x-3} \quad \text{m.}$$

dim

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 7-x > x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 \geq x \geq 3 \\ 10 > 2x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 7 \\ x < 5 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [3,5[$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \left(d(P,Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \right)$$

$$\left(d(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \right)$$

Fine della 2ª lezione (14 ott 2010)