Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Giovedì 14 maggio 2009

La formula dei trapezi e la formula di Cavalieri-Simpson sono casi particolari delle formule di Newton-Cotes,

- si introducono $n+1$ nodi equispaziati $\xi = a + i\frac{b-a}{n} \in [a,b]$, $i = 0, ..., n$;
- si costruisce il polinomio interpolatore $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., n$

Osservazione

Essendo i nodi equispaziati, i pesi α_i nella formula $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ dipendono solo da n e da h.

Osservazione

- $(n = 0)$: *Formula del punto medio*
- $(n = 1)$: *Formula del trapezio*
- $(n = 2)$: *Formula di Cavalieri-Simpson*

Formula (del punto medio)

$$I_{PM}(f) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right), \quad E_0 = \int_a^b f\,dx - I_{PM}(F) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Grado di precisione: $r = 1$.

Formula (del trapezio)

$$I_{TR}(f) = \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right], \quad E_1 = \int_a^b f\,dx - I_{TR}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Grado di precisione : $r = 1$.

Formula (di Cavalieri-Simpson)

$$I_{CS} = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \quad E_2 = \int_a^b f\,dx - I_{CS} = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\xi)$$

Grado di precisione: $r = 3$

Formula (del punto medio composita)

$$I_{PM}^N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{j=1}^{N} f(m_j) = H\sum_{j=1}^{N} f(m_j)$$

dove $H = (b-a)/N$, $m_j = a + \frac{2j-1}{2}H$ *e* $T_j = [a+(j-1)H, a+jH]$ $(j = 1, ..., N)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_{PM}^N(f) = \frac{(b-a)}{24}H^2 f''(\widehat{\xi})$$

Formula (dei trapezi composita)

$$I_{TR}^N(f) = \frac{H}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(z_j) + f(b)\right]$$

dove $z_j = a + jH$ *e* $H = (b-a)/N$ $(j = 1, ..., N)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_{TR}^N(f) = -\frac{H^2}{12}(b-a)f''(\widehat{\xi})$$

Formula (di Cavalieri-Simpson composita)

$$I_{CS}^N(f) = \frac{H}{6} \sum_{j=1}^{N} [f(z_{j-1}) + 4f(m_j) + f(z_j)]$$

dove $H = (b-a)/N$, $z_j = a + jH$, $m_j = a + \frac{2j-1}{2} H$ $(j = 1, ..., N)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx - I_{CS}^N(f) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{(iv)}(\widehat{\xi})$$

Teorema (sulle formule di Newton-Cotes composite)

Data una formula di Newton-Cotes composita

- *con n pari allora*
  - *ha grado di precisione* $n+1$
  - *ha ordine di infinitesimo* $n+2$
- *con n dispari allora*
  - *ha grado di precisione* n
  - *ha ordine di infinitesimo* $n+1$

Esempio (Formule composite)

- *Per la Formula del punto medio* ($n = 0$) *troviamo*
  - *grado di precisione* 1
  - *ha ordine di infinitesimo* 2
- *Per la Formula del trapezio* ($n = 1$) *troviamo*
  - *grado di precisione* 1
  - *ha ordine di infinitesimo* 2
- *Per la Formula di Cavalieri-Simpson* ($n = 2$) *troviamo*
  - *grado di precisione* 3
  - *ha ordine di infinitesimo* 4

Integrazione numerica

Stima a posteriori dell'errore per le formule composite

Osservazione

Se l'errore di quadratura è un infinitesimo di ordine $k > 1$ *per* $H = \dfrac{b-a}{N} \to 0$, *allora*

$$I(f) - I^{2N}(f) \approx \frac{1}{2^k - 1}\left[I^{2N}(f) - I^{N}(f)\right]$$

Vediamo che succede quando si lavora con la formula dei trapezi composita. Sia $H = (b-a)/N$. Posto $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, si ha

$$\begin{aligned} I(f) - I_{TR}^{N}(f) &= -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\widehat{\xi}) \\ I(f) - I_{TR}^{2N}(f) &= -\frac{b-a}{12}\left(\frac{H}{2}\right)^2 f''(\widehat{\xi}) \end{aligned}$$

e quindi, se $f''(\widehat{\xi}) \approx f''(\widehat{\eta})$,si ha

$$I(f) - I_{TR}^{2N}(f) \approx \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]$$

Integrazione numerica

$$
\begin{aligned}
I(f) - I_{TR}^{2N}(f) &\approx \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{N}(f)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f) + I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] + \frac{1}{4}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\frac{3}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] \approx \frac{1}{4}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]
$$

e infine

$$
\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] \approx \frac{1}{3}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]
$$

Si osservi che $\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2 - 1}$

Integrazione numerica

Formule di Gauss

Una formula di quadratura è una identità approssimata del tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Osservazione

Per le formule di Newton-Cotes

- *i nodi sono equispaziati* $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $i = 0, \ldots, n$
- *i pesi* α_i *si ottengono costruendo il polinomio di grado n che passa per* $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$
- *il grado di precisione è n, e questo dipende dal fatto che i parametri liberi sono* $n + 1$

Osservazione

Una strategia alternativa consiste nel determinare

- *gli* $n + 1$ *nodi* x_i
- *gli* $n + 1$ *coefficienti* α_i

in modo da ottenere un grado di precisione più alto, pari a $2n + 1$*, in quanto abbiamo* $2n + 2$ *parametri liberi.*

Teorema

Data una formula interpolatoria con $n+1$ nodi,il suo grado di precisione p è t.c.

$$n \leq p \leq 2n+1.$$

Che sia maggiore o uguale a n è noto.
Siano x_i $i = 0, ..., n$ i nodi. Sia $q(x) \in \mathbb{P}_{2(n+1)}$ dato da $q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$si ha

$$\int_a^b q(x)\,dx > 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q(x_i) = 0$$

e quindi la precisione deve essere inferiore o uguale a $2n+1$. □

I polinomi di Legendre $L_k(x) \in \mathbb{P}_k$ sono definiti in modo ricorsivo

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_{k+1}(x) &= \tfrac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \tfrac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Osservazione

Il polinomi di Legendre sono tra loro ortogonali, nel senso che

$$\int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x)\, dx = 0, \quad \text{se } i \neq j.$$

Osservazione

- *Gli $n+1$ nodi della formula di quadratura di Gauss sono le radici del polinomio di Legendre L_{n+1}.*
- *Queste radici del polinomio L_{n+1} sono tutte distinte e cadono tutte in $[-1, 1]$.*

Teorema (La formula di Gauss ha grado di precisione $2n+1$)

Se $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G f(x_i^G)$ *è la formula di Gauss sull'intervallo* $[-1,1]$ *relativa a* $n+1$ *nodi, allora il suo grado di precisione è* $2n+1$.

Sia $p(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$: dobbiamo provare che

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G p(x_i^G).$$

Sappiamo che

$$p(x) = q(x)L_{n+1}(x) + r(x), \quad q(x), r(x) \in \mathbb{P}_n$$

e (vedi la definizione ricorsiva)

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x) L_{n+1}(x) + r(x)$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{1} L_k(x) L_{n+1}(x)\,dx + \int_{-1}^{1} r(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} r(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G r(x_i^G), \quad [\textit{il grado di precisione} \geq n] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G \left[q(x_i^G) L_{n+1}(x_i^G) + r(x_i^G) \right] \quad [L_{n+1}(x_i^G) = 0,\ i = 0, \ldots, n] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G p(x_i^G)
\end{aligned}
$$

□

I nodi e i pesi delle formule di Gauss su $(-1, 1)$ sono tabulati.

Numero nodi	Nodi	Pesi
1	0	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
3	$-\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
...		

Osservazione

Si osservi che, quando $n = 1$, si ritrova la formula del punto medio: è una particolare formula di Gauss (che non fosse interpolatoria, era evidente).

Osservazione

I nodi nella formula di Gauss sono simmetrici rispetto al punto medio.

Ricordiamo che

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \left[1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Osservazione (Formula di Gauss con 2 nodi)

Se devo calcolare con la formula di Gauss $\int_a^b f(x)\,dx$, con $[a,b] \neq [-1,1]$, allora il cambiamento di variabili $x \to t$ dato da $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ permette di scrivere

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right) dx \\ &\approx \frac{b-a}{2}\left[f(\widehat{x}_0) + f(\widehat{x}_1)\right] \\ &= I_G(f) \end{aligned}$$

dove $\widehat{x}_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}$ e $\widehat{x}_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}$

Osservazione

L'errore di quadratura è

$$I(f) - I_G(f) = \frac{(b-a)^5}{4320} f^{(iv)}(\xi)$$

ove $\xi \in [a,b]$ opportuno

Esercizio

Calcolare $I_G(f)$ dove $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nel caso in cui i nodi siano 3

Osservazione

Più in generale, nel caso di $n+1$ nodi e $f \in C^{n+2}$, si ha

$$I(f) - I_G(f) = \left[\int_a^b L_{n+1}^2(x)\, dx \right] \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

ove $\xi \in [a, b]$ opportuno