Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 11 maggio 2009

Integrazione numerica

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x_0 \in [a, b]$. Allora

- *la funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ è una primitiva di $f(x)$*
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha)$ *per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$.*

Problema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$. Il suo integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

- *può essere "difficile" da calcolare attraverso il Teorema fondamentale del calcolo integrale, ovvero può essere complesso il calcolo della primitiva*
- *la primitiva di f può non essere esprimibile in termini di funzioni elementari: in tal caso per valutare l'integrale è necessaria una qualche approssimazione*

Integrazione numerica

Definizione

Una formula esplicita che permetta di approssimare $I(f)$ viene detta `formula di quadratura` *(o formula d'integrazione numerica)*

Soluzione

Un modo standard di procedere è il seguente

- *prendere $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ insieme ai corrispondenti valori $f(x_i)$*
- *calcolare il polinomio interpolatore $\Pi_n f$ in corrispondenza ai nodi scelti*
- *calcolare*

$$
\begin{aligned}
I(\Pi_n f) &= \int_a^b \Pi_n f(x)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \left(\int_a^b L_i(x)\,dx \right)
\end{aligned}
$$

- *stimare l'errore $I(f) - I(\Pi_n f)$*

Integrazione numerica

Le formula di quadratura interpolatorie rientrano tra le formule seguenti

Definizione

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

dove

- *gli α_i sono detti* `pesi` *(o coefficenti)*
- *gli x_i sono detti nodi*

Definizione

Data una formula di quadratura $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$, si dice che questa ha grado di precisione (o di esattezza) $r \in \mathbb{N}$ se

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = I(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \forall f \in \mathbb{P}_r$$

ed esiste $f \in \mathbb{P}_{r+1}$ per cui non vale l'uguaglianza. Indichiamo
$\mathbb{P}_r = \{$*polinomi di grado al più* $r\}$

Integrazione numerica

Teorema

Data una formula di quadratura interpolatoria che usi $n+1$ nodi distinti, questa ha grado di precisione $\geq n$.

Osservazione

Il teorema precedente dice che la formula di quadratura interpolatoria su $n+1$ nodi è esatta sui polinomi di grado al più n:
questo è ovvio, in quanto il polinomio di grado $q \leq n$ passante per $n+1$ punti è unico!

Definizione

Diciamo Errore di quadratura il numero

$$E_n(f) = I(f) - I(\Pi_n f)$$

Osservazione

Dalla definizione segue che

$$|E_n(f)| = |I(f) - I(\Pi_n f)| \leq \int_a^b |f(x) - \Pi_n f(x)|\, dx$$

Integrazione numerica

Formula del punto medio

Il teorema del valor medio, nel caso in cui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, dice che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

dove $\min_{[a,b]} f \leq f(\xi) \leq \max_{[a,b]} f$

Formula (del punto medio)

$$I_{PM}(f) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

Per l'errore di quadratura si ha

$$E_0 = \int_a^b f(x)\, dx - I_{PM}(F) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

dove ξ è un opportuno punto di $[a, b]$
Il grado di precisione della formula del punto medio è $r = 1$.

Integrazione numerica

Per l'errore di quadratura si procede così : la formula di Taylor con il resto di Lagrange ci dà (poniamo $c = (a+b)/2$)

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(z)$$

dove z è un valore compreso tra c e x.Dunque

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(c)\,dx + \int_a^b f'(c)(x-c)\,dx + \int_a^b \frac{(x-c)^2}{2} f''(z)\,dx \\
&= I_{PM}(f) + f'(c)\int_a^b (x-c)\,dx + f''(\xi)\int_a^b \frac{(x-c)^2}{2}\,dx \\
&= I_{PM}(f) + f''(\xi)\left[\frac{(x-c)^3}{6}\right]_a^b \\
&= I_{PM}(f) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}
\end{aligned}$$

Integrazione numerica

Per quanto riguarda il grado di precisione, possiamo limitarci a considerare i polinomi $p(x) = 1$, $p(x) = x$, $p(x) = x^2$, ..., $p(x) = x^n$, etc.
Essendo il resto nella forma (derivata seconda)(costante), si ha subito che il grado di precisione è al più 1! Verifichiamo che la formula è esatta per i polinomi di grado 0 e 1, ovvero che $r = 1$.

- Per $p(x) = 1$ il risultato è immediato
- Per $p(x) = x$ si ha

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) \\
&= (b-a)\tfrac{(b+a}{2} \\
&= I_{PM}(p)
\end{aligned}
$$

Integrazione numerica

Formula del trapezio

In luogo del calcolo di $\int_a^b f\,dx$ calcoliamo $\int_a^b \Pi_1 f\,dx$, dove

$$\Pi_1 f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

il polinomio di primo grado (la retta) passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$,e si trova

$$\int_a^b \Pi_1 f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

Formula (del trapezio)

$$I_{TR}(f) = \frac{(b-a)}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

Per l'errore di quadratura si ha

$$E_1 = \int_a^b f(x)\,dx - I_{TR}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

dove ξ è un opportuno punto di $[a, b]$

Il grado di precisione della formula del punto medio è $r = 1$.

Integrazione numerica

Per l'errore di quadratura si procede così : dai risultati sull'approssimazione polinomiale sappiamo che

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(z)}{2}(x-a)(x-b)$$

dove $z \in [a, b]$ opportuno.Dunque

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b \Pi_1 f(x)\,dx + \int_a^b \frac{f''(z)}{2}(x-a)(x-b)\,dx \\
&= I_{TR}(f) + \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + (b-a)ab\right]_a^b \\
&= I_{TR}(f) - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}
\end{aligned}$$

Valutiamo il grado di precisione. Essendo il resto nella forma (derivata seconda)(costante), si ha subito che il grado di precisione è al più 1!

- Per $p(x) = 1$ il risultato è immediato
- Per $p(x) = x$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\
&= \tfrac{1}{2}(b^2-a^2) = \tfrac{(b-a)}{2}[b+a] = I_{TR}(p)
\end{aligned}$$

Integrazione numerica

Formula di Cavalieri-Simpson

In luogo di $\int_a^b f(x)\,dx$ calcoliamo $\int_a^b \Pi_2 f(x)\,dx$dove

$$\Pi_2 f(x) = f(a) + 2\frac{f(c)-f(a)}{b-a}(x-a) + 2\frac{f(b)+f(a)-2f(c)}{(b-a)^2}(x-a)(x-c)$$

è il polinomio di grado 2 passante per $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ e $(b, f(b))$.Si ottiene

$$\int_a^b \Pi_2 f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Formula (di Cavalieri-Simpson)

$$I_{CS}(f) = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

L'errore di quadratura: esiste $\xi \in [a, b]$ t.c.

$$E_2 = \int_a^b f(x)\,dx - I_{CS}(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\xi)$$

Il grado di precisione è $r = 3$

Integrazione numerica

Si inizia col calcolare (poniamo $c = (a+b)/2$)

$$\Pi_2 f(x) = f[a] + f[a,c](x-a) + f[a,c,b](x-a)(x-c)$$

e si trova

$$f[a] = f(a), \quad f[a,c] = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = 2\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$$

$$f[a,c,b] = \frac{f[c,b]-f[a,c]}{b-a} = 2\frac{f(b)+f(a)-2f(c)}{(b-a)^2}$$

Inoltre

$$\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}, \qquad \int_a^b (x-a)(x-c)\,dx = \frac{(b-a)^3}{12}$$

da cui segue la formula.

Integrazione numerica

Per quanto riguarda il grado di precisione, facciamo la verifica

- se $p(x) = 1$, è immediato
- se $p(x) = x$, allora

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

mentre

$$I_{CV}(p) = \frac{b-a}{6}\left[b + 4\frac{b+a}{2} + a\right] = \frac{b-a}{6}\,[3b + 3a] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

- se $p(x) = x^2$ allora

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

mentre

$$I_{CV}(p) = \frac{b-a}{6}\left[b^2 + 4\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{b-a}{6}\left[2b^2 + 2ab + 2a^2\right] = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Integrazione numerica

- se $p(x) = x^3$ allora

$$\int_a^b x^3\, dx = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$$

mentre

$$\begin{aligned} I_{CV}(p) &= \frac{b-a}{6}\left[b^3 + 4\left(\frac{b+a}{2}\right)^3 + a^3\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[\frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{3}{2}a^3\right] = \frac{(b^4 - a^4)}{4} \end{aligned}$$

e quindi il grado di precisione è $r = 3$.Che non possa essere maggiore segue dall'errore di quadratura.

Integrazione numerica

Un poco più elaborato è il calcolo dell'errore di quadratura. Avendo posto $h = (b-a)/2$ e $\omega_2(x) = (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$, si ha che (con la sostituzione $x = a + th$) al variare di $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \int_a^x \omega_2(t)\, dt \\ &= h^4 \int_0^{\frac{x-a}{h}} t(t-1)(t-2)\, dt \\ &= h^4 \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2 \right]_0^{(x-a)/2} \\ &= \frac{h^2}{4}(x-a)^2 \left[\frac{x-a}{h} - 2 \right]^2 \end{aligned}$$

- $\sigma(a) = \sigma(a+2h) = \sigma(b) = 0$
- $\sigma(x)$ è simmetrica rispetto a $x = (a+b)/2$
- $\sigma(x) \geq 0$ in $[a, b]$

Si sa che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che

$$f(x) = \Pi_2 f(x) + \omega_2(x) \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = \Pi_2 f(x) + \omega_2(x) f[a, c, b, x]$$

e si tratta di calcolare

$$r_3 = \int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\, dx = \int_a^b \omega_2(x) f[a, c, b, x]\, dx$$

Integrazione numerica

Integrando per parti si ha

$$r_3 = \int_a^b \omega_2(x) f[a,c,b,x]\,dx = [\sigma_2(x) f[a,c,b,x]]_a^b - \int_a^b \sigma_2(x) \frac{d}{dx}\left(f[a,c,b,x]\right)\,dx$$

e dunque, essendo $\sigma_2(a) = \sigma_2(b) = 0$, si ha

$$r_3 = -\int_a^b \sigma_2(x) \frac{d}{dx}\left(f[a,c,b,x]\right)\,dx = -\int_a^b \sigma_2(x) \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\,dx$$

dove $\eta \in (a,b)$ opportuno.Per il teorema della media integrale, essendo $\sigma_2 > 0$ in (a,b), si ha che esiste $\xi \in (a,b)$ tale che

$$r_3 = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b \sigma_2(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} r_3 &= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[x\sigma_2(x)]_a^b + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b x \frac{d}{dx}\left(\sigma_2(x)\right)\,dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b x \frac{d}{dx}\left(\sigma_2(x)\right)\,dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b x\omega_2(x)\,dx \end{aligned}$$

Integrazione numerica

Infine si ha

$$
\begin{aligned}
r_3 &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b x\omega_2(x)\,dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 (a+th)(th)(th-h)(th-2h)\,hdt \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}a\sigma_2(b) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^5\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)\,dt \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}h^5\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)\,dt \\
&= \ldots \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(-\frac{4}{15}h^5\right) \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5
\end{aligned}
$$

La formula dei trapezi e la formula di Cavalieri-Simpson sono casi particolari delle formule di Newton-Cotes,

- si introducono $n+1$ nodi equispaziati $\xi = a + i\frac{b-a}{n} \in [a,b]$, $i = 0, ..., n$;
- si costruisce il polinomio interpolatore $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., n$

Osservazione

Essendo i nodi equispaziati, i pesi α_i nella formula $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ dipendono solo da n e da h.

Osservazione

- $(n = 0)$: *Formula del punto medio*
- $(n = 1)$: *Formula del trapezio*
- $(n = 2)$: *Formula di Cavalieri-Simpson*

Per ottenere maggiore accuratezza si può (restando nell'ambito dell'interpolazione polinomiale)

- aumentare il numero dei nodi d'interpolazione
- suddividere l'intervallo in tanti sottointervalli e poi applicare le formule prima introdotte

La seconda alternativa (applicare le formule di Newton-Cotes a sottointervalli) è preferibile in quanto aumentando il numero dei nodi si vengono ad avere due problemi

- maggiore complessità di calcolo (più nodi vs. più calcoli)
- con un numero elevato di nodi (≥ 8) compaiono nella formula $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ dei coefficienti $\alpha_j < 0$, che numericamente sono da evitare

Osservazione

In alternativa all'interpolazione su nodi fissati, si può ricorrere al metodo d'integrazione di Gauss: l'idea è quella di non fissare a priori i nodi, il che permette di ottimizzare la formula.
In particolare, la formula di Gauss fa intervenire solo coefficneti $\alpha_i > 0$.

Quindi si procede dividendo l'intervallo di integrazione $[a, b]$ in $N > 1$ sottointervalli T_j, $j = 0, ..., N$ di ampiezza $H = \dfrac{b-a}{N}$

$$T_j = [z_{j-1}, z_j], \qquad z_j = a + jH, \qquad J = 0, ..., N$$

e quindi si va a considerare

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{z_{j-1}}^{z_j} f(x)\,dx \right)$$

Su ciascun sottointervallo si utilizza una formula interpolatoria.

Formula (del punto medio composita)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile, fissato* $N > 0$ *e* $H = (b-a)/N$*, si ha*

$$I_{PM}^{N}(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} f(m_j) = H \sum_{j=1}^{N} f(m_j)$$

dove $m_j = a + \frac{2j-1}{2} H$*,* $J = 1, ..., N$*, è il punto medio dell'intervallo* $T_j = [a + (j-1)H, a + jH]$*.*
L'errore di quadratura è un infinitesimo di ordine 2 in H*: esistono* $\xi_j \in [z_{j-1}, z_j]$ *t.c.*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx - I_{PM}^{N}(f) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{H^3}{24} f''(\xi_j) \\
&= \frac{H^3}{24} \sum_{j=1}^{N} f''(\xi_j) \\
&= \frac{(b-a)}{24} H^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f''(\xi_j) \right) \\
&= \frac{(b-a)}{24} H^2 f''(\widehat{\xi})
\end{aligned}$$

Formula (dei trapezi composita)

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile, fissato* $N > 0$*, si ha*

$$I_{TR}^{N}(f) = \frac{H}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(z_j) + f(b)\right]$$

dove $z_j = a + jH$*,* $J = 1, ..., N$ *e* $H = (b-a)/N$*.*
L'errore di quadratura è un infinitesimo di ordine 2 in H*: esistono* $\xi_j \in [z_{j-1}, z_j]$ *t.c.*

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^b f(x)\,dx - I_{TR}^{N}(f) &= \textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{H^3}{12}f''(\xi_j)\right) \\
&= -\frac{H^3}{12}\left(\sum_{j=1}^{N} f''(\xi_j)\right) \\
&= -\frac{H^2}{12}(b-a)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f''(\xi_j)\right) \\
&= -\frac{H^2}{12}(b-a)f''(\widehat{\xi})
\end{aligned}$$

Formula (di Cavalieri-Simpson composita)

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile, fissato* $N > 0$*, si ha*

$$
\begin{aligned}
I_{CS}^N(f) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{H}{6} \left[f(z_{j-1}) + 4f(m_j) + f(z_j)\right] \\
&= \frac{H}{6} \sum_{j=1}^{N} \left[f(z_{j-1}) + 4f(m_j) + f(z_j)\right]
\end{aligned}
$$

dove $z_j = a + jH$*,* $m_j = a + \frac{2j-1}{2}H$*,* $J = 1, ..., N$ *e* $H = (b-a)/N$*.*
L'errore di quadratura è un infinitesimo di ordine 4 in H*: esistono* $\xi_j \in [z_{j-1}, z_j]$ *t.c.*

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx - I_{CS}^N(f) &= \sum_{j=1}^{N} \left(-\frac{1}{90}\left(\frac{H}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\xi_j)\right) \\
&= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{H}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f^{(iv)}(\xi_j)\right) \\
&= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{H}{2}\right)^4 f^{(iv)}(\widehat{\xi})
\end{aligned}
$$

Integrazione numerica

Teorema (sulle formule di Newton-Cotes composite)

Data una formula di Newton-Cotes composita

- *con n pari allora*
  - *ha grado di precisione $n+1$*
  - *ha ordine di infinitesimo $n+2$*
- *con n dispari allora*
  - *ha grado di precisione n*
  - *ha ordine di infinitesimo $n+1$*

Esempio

- *Per la Formula del punto medio ($n=0$) troviamo*
  - *grado di precisione* 1
  - *ha ordine di infinitesimo* 2
- *Per la Formula del trapezio ($n=1$) troviamo*
  - *grado di precisione* 1
  - *ha ordine di infinitesimo* 2
- *Per la Formula di Cavalieri-Simpson ($n=2$) troviamo*
  - *grado di precisione* 3
  - *ha ordine di infinitesimo* 4

Osservazione

Se l'errore di quadratura è un infinitesimo di ordine $k > 1$ per $H = \dfrac{b-a}{N} \to 0$, allora

$$I(f) - I^{2N}(f) \approx \frac{1}{2^k - 1}\left[I^{2N}(f) - I^N(f)\right]$$

Vediamo che succede quando si lavora con la formula dei trapezi composita. Sia $H = (b-a)/N$. Posto $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, si ha

$$\begin{aligned} I(f) - I^N_{TR}(f) &= -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\widehat{\xi}) \\ I(f) - I^{2N}_{TR}(f) &= -\frac{b-a}{12}\left(\frac{H}{2}\right)^2 f''(\widehat{\xi}) \end{aligned}$$

e quindi, se $f''(\widehat{\xi}) \approx f''(\widehat{\eta})$,si ha

$$I(f) - I^{2N}_{TR}(f) \approx \frac{1}{4}\left[I(f) - I^N_{TR}(f)\right]$$

Integrazione numerica

$$
\begin{aligned}
I(f) - I_{TR}^{2N}(f) &\approx \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{N}(f)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f) + I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] + \frac{1}{4}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]
\end{aligned}
$$

e quindi

$$\frac{3}{4}\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] \approx \frac{1}{4}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]$$

e infine

$$\left[I(f) - I_{TR}^{2N}(f)\right] \approx \frac{1}{3}\left[I_{TR}^{2N}(f) - I_{TR}^{N}(f)\right]$$

Si osservi che $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2^2 - 1}$

Integrazione numerica

Formule di Gauss

Una formula di quadratura è una identità approssimata del tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Osservazione

Per le formule di Newton-Cotes

- *i nodi sono equispaziati* $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \quad i = 0, \dots, n$
- *i pesi* α_i *si ottengono costruendo il polinomio di grado* n *che passa per* $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$
- *il grado di precisione è* n*, e questo dipende dal fatto che i parametri liberi sono* $n+1$

Osservazione

Una strategia alternativa consiste nel determinare

- *gli* $n+1$ *nodi* x_i
- *gli* $n+1$ *coefficienti* α_i

in modo da ottenere un grado di precisione più alto, pari a $2n+1$*, in quanto abbiamo* $2n+2$ *parametri liberi.*

Teorema

Data una formula interpolatoria con $n+1$ nodi,il suo grado di precisione p è t.c.

$$n \leq p \leq 2n+1.$$

Che sia maggiore o uguale a n è noto.
Siano x_i $i = 0, ..., n$ i nodi. Sia $q(x) \in \mathbb{P}_{2(n+1)}$ dato da $q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$si ha

$$\int_a^b q(x)\,dx > 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q(x_i) = 0$$

e quindi la precisione deve essere inferiore o uguale a $2n+1$. □

I polinomi di Legendre $L_k(x) \in \mathbb{P}_k$ sono definiti in modo ricorsivo

$$\begin{aligned} &L_0(x) = 1 \\ &L_1(x) = x \\ &L_{k+1}(x) = \tfrac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \tfrac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Osservazione

Il polinomi di Legendre sono tra loro ortogonali, nel senso che

$$\int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x)\, dx = 0, \quad \textit{se } i \neq j.$$

Osservazione

- *Gli $n+1$ nodi della formula di quadratura di Gauss sono le radici del polinomio di Legendre L_{n+1}.*
- *Queste radici del polinomio L_{n+1} sono tutte distinte e cadono tutte in $[-1, 1]$.*

Teorema (La formula di Gauss ha grado di precisione $2n+1$)

Se $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G f(x_i^G)$ *è la formula di Gauss sull'intervallo* $[-1,1]$ *relativa a* $n+1$ *nodi, allora il suo grado di precisione è* $2n+1$.

Sia $p(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$: dobbiamo provare che

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G p(x_i^G).$$

Sappiamo che

$$p(x) = q(x)L_{n+1}(x) + r(x), \quad q(x), r(x) \in \mathbb{P}_n$$

e (vedi la definizione ricorsiva)

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x) L_{n+1}(x) + r(x)$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)\,dx &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} c_k \displaystyle\int_{-1}^{1} L_k(x)L_{n+1}(x)\,dx + \int_{-1}^{1} r(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} r(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G r(x_i^G), \quad \textit{[il grado di precisione} \geq n\textit{]} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G \left[q(x_i^G) L_{n+1}(x_i^G) + r(x_i^G) \right] \quad [L_{n+1}(x_i^G) = 0,\ i = 0, \ldots, n] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^G p(x_i^G)
\end{aligned}
$$

$\square$

I nodi e i pesi delle formule di Gauss su $(-1, 1)$ sono tabulati.

Numero nodi	Nodi	Pesi
1	0	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1, 1$
3	$-\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
...		

Osservazione

Si osservi che, quando $n = 1$, si ritrova la formula del punto medio: è una particolare formula di Gauss (che non fosse interpolatoria, era evidente).

Osservazione

I nodi nella formula di Gauss sono simmetrici rispetto al punto medio.

Integrazione numerica

Formule di Gauss

Ricordiamo che

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \left[1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Osservazione (Formula di Gauss con 2 nodi)

Se devo calcolare con la formula di Gauss $\int_a^b f(x)\,dx$*, con* $[a,b] \neq [-1,1]$*, allora il cambiamento di variabili* $x \to t$ *dato da* $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ *permette di scrivere*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)dx \\ &\approx \tfrac{b-a}{2}[f(\widehat{x}_0) + f(\widehat{x}_1)] \\ &= I_G(f) \end{aligned}$$

dove $\widehat{x}_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}$ *e* $\widehat{x}_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}$

Osservazione

L'errore di quadratura è

$$I(f) - I_G(f) = \frac{(b-a)^5}{4320} f^{(iv)}(\xi)$$

ove $\xi \in [a,b]$ *opportuno*

Esercizio

Calcolare $I_G(f)$ dove $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nel caso in cui i nodi siano 3

Osservazione

Più in generale, nel caso di $n+1$ nodi e $f \in C^{n+2}$, si ha

$$I(f) - I_G(f) = \left[\int_a^b L_{n+1}^2(x)\,dx\right] \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

ove $\xi \in [a,b]$ opportuno