Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 7 maggio 2009

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \le \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

- I coefficienti della retta di regressione $r(x) = a_0 + a_1 x$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

- I coefficienti della parabola di miglior approssimazione $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

- I coefficienti del polinomio di grado ℓ di miglior approssimazione $p_\ell(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_\ell x^\ell$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Tutti questi sistemi si ottengono dalle equazioni normali, ovvero da

$$A^T A x = A^T b$$

dove la matrice $m \times (\ell + 1)$ (in generale non quadrata) A è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^\ell \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^\ell \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^\ell \end{pmatrix}$$

mentre

$$x^T = (a_0, a_1, \dots, a_\ell), \quad b^T = (y_1, \dots, y_n)$$

Osservazione

Nel caso in cui $\ell = n$, la matrice A diventa la matrice di Vandermonde e le equazioni normali diventano le equazioni che determinano il polinomio interpolatore, che risulta essere il polinomio di miglior approssimazione quando $\ell = n$.

Osservazione

Pur non essendo A quadrata, la matrice $A^T A$ *è quadrata con* $(\ell+1)$ *righe e* $(\ell+1)$ *colonne: infatti*

- A *è* $m \times (\ell+1)$
- A^T *è* $(\ell+1) \times m$.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$,dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato,se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione* x_0
2. *Se* x_1 *è un'altra soluzione, allora* $Ax_0 = Ax_1$*.*
3. *Il residuo* $r(x) = b - Ax_0$ *è univocamente determinato e soddisfa l'equazione* $A^T x = 0$
4. *Ogni soluzione* x_0 *del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

   $$A^T Ax = A^T x$$

   e viceversa.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$,la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la retta* $r(x) = \alpha + \beta x$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (r(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La retta esiste, come si è già visto in teoria. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si vuole determinare il piano $f(x) = f(x', x'') = \alpha + \beta x' + \gamma x''$ *che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti*

$x_i = (x_i', x_i'')$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(0,0)$
$y_i = f(x_i)$	3	6	5	0

Il sistema $AX = b$ da risolvere è (nel senso dei minimi quadrati) il seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ ha rango 3, cioè massimo. (A differenza del caso di una variabile, per avere questo non è sufficiente che i punti siano distinti nel piano: occorre che ne esistano tre non allineati).
Le equazioni normali $A^T AX = A^T b$ sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Si noti ancora che la matrice a sinistra è simmetrica definita positiva.

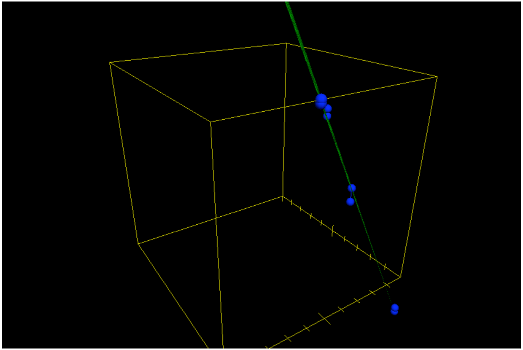
Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Le equazioni normali hanno come soluzione (unica, essendo $rk(A^T A) = rk(A) = 3$)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -6 \\ 73 \\ 101 \end{pmatrix},$$

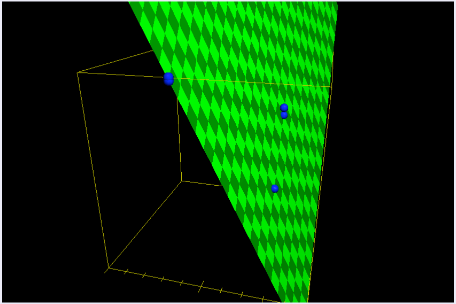
quindi la soluzione è data da

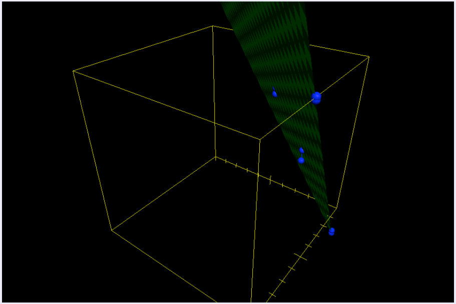
$$f(x', x'') = \frac{1}{50}(-6 + 73x' + 101x'').$$



Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Il piano da due visuali differenti.





Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si determini la parabola $p(x) = a + bx + cx^2$ che approssima nel senso dei minimi quadrati i nodi

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	0	-3	-5

Si tratta di risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni normali sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix},$$

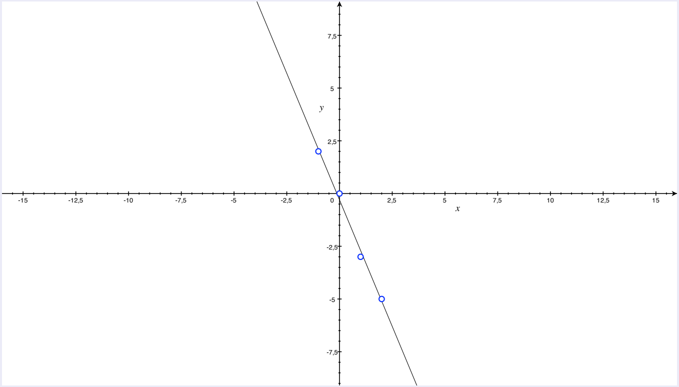
che hanno come soluzione $(a, b, c) = (-\frac{3}{10}, -\frac{12}{5}, 0)$, quindi il polinomio approssimante nel senso dei minimi quadrati di (al più) secondo grado è

$$p(x) = -\frac{3}{10} - \frac{12}{5}x,$$

ovvero è in realtà di primo grado.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

La parabola di migliore approssimazione, che in questo caso si riduce ad una retta.



Problema

La cubica (il polinomio di 3 *grado) di migliore approssimazione è ancora la retta*

$$p(x) = -\frac{3}{10} - \frac{12}{5}x?$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Osservazione

Osserviamo che, se modifichiamo il vettore $b^T = (2, 0, -3, 5)$ *di poco, la retta di regressione diventa una parabola: ad esempio, preso* $\overline{b}^T = (2, 10^{-3}, -3, 5)$*, si trova che*

$$p(x) = -0,3006 - 2,4002x + 3 * 10^{-4}x^2$$

Osservazione

Se in luogo di $b^T = (2, 0, -3, 5)$ *si prende* $\overline{b}^T = (3, 0, -3, 6)$*,la retta di regressione resta una retta ma cambia l'equazione che risulta*

$$p(x) = -3x$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*
$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$
2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

La soluzione è $x_0 = (1.0286, 0.9000, 0.2857)^T$,ovvero

$$p(x) = 1.0286 + 0.9 * x + 0.2857 * x^2$$

Si può calcolare il residuo, ovvero

$$\|Ax_0 - b\| = 1.7196$$

e si ricordi che

$$\|Ax_0 - b\| = \sqrt{\min_{p(x)\in\mathbb{P}^2} \sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione x_0 nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$*

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T Ax = A^T b$$

  osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.
- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

La soluzione è

$$x_0^T = (0.6429,\ -1.2143)^T.$$

Il residuo è

$$\|Ax_0 - b\| = 0.2673.$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Sia dato il sistema lineare $Ax = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare

- *la matrice inversa nel senso di Moore-Penrose*
- *la soluzione x_0 del sistema nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A^T b)^T = (-4, 0, 1)$$

$$x_0^T = [(A^T A)^{-1} A^T b]^T = (-0.8571, \, -0.4286, \, 0.2857)$$

$$\|Ax_0 - b\| = 1.1339$$

L'inversa di Moore Penrose C è data da

$$C = \begin{pmatrix} -0.3810 & -0.0476 & -0.2381 & -0.0476 \\ 0.1429 & 0.1429 & -0.2857 & -0.8571 \\ -0.0952 & 0.2381 & 0.1905 & 0.2381 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione x_0 nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$*

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

R.

$$x_0^T = (0.8333,\ 1.6667,\ -0.1111)$$

$$\|Ax_0 - b\| = 1.1102 * 10^{-15}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione x_0 nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$*

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

R.

$$x_0^T = (-1.3824, -0.3235)$$

$$\|Ax_0 - b\| = 0.8044$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-1	1	2	3
y_i	0	2	4	0

1. *determinare il polinomio interpolatore*
2. *determinare la retta di regressione, scrivendo le equazioni normali*
3. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

scrivendo le equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

1.
2. $r(x) = 1.1429 + 0.2857 * x$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

3. $p(x) = 2.1818 + 1.6364 * x - 0.7273 * x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 35 \\ 15 & 35 & 99 \end{pmatrix}$$

Integrazione numerica

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, e sia* $x_0 \in [a, b]$. *Allora*

- *la funzione* $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ *è una primitiva di* $f(x)$
- $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha)$ *per ogni* $\alpha, \beta \in [a, b]$.

Problema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile su* $[a, b]$. *Il suo integrale definito*

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

- *può essere "difficile" da calcolare attraverso il Teorema fondamentale del calcolo integrale, ovvero può essere complesso il calcolo della primitiva*
- *la primitiva di* f *può non essere esprimibile in termini di funzioni elementari: in tal caso per valutare l'integrale è necessaria una qualche approssimazione*

Integrazione numerica

Definizione

Una formula esplicita che permetta di approssimare $I(f)$ viene detta `formula di quadratura` *(o formula d'integrazione numerica)*

Soluzione

Un modo standard di procedere è il seguente

- *prendere $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ insieme ai corrispondenti valori $f(x_i)$*
- *calcolare il polinomio interpolatore $\Pi_n f$ in corrispondenza ai nodi scelti*
- *calcolare*

$$
\begin{aligned}
I(\Pi_n f) &= \int_a^b \Pi_n f(x)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \left(\int_a^b L_i(x)\,dx \right)
\end{aligned}
$$

- *stimare l'errore $I(f) - I(\Pi_n f)$*