Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 4 maggio 2009

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ: se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$: è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ: se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$: è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Problema

Date $n+1$ coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$, determinare un polinomio $\Pi_\ell \in \mathbb{P}_\ell$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} (\Pi_\ell^*(x_i) - y_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (q(x_i) - y_i)^2$$

per ogni $q \in \mathbb{P}_\ell$.

Definizione

Il polinomio Π_ℓ^* (quando esiste) è detto polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.
Il polinomio di grado $\ell = 1$ viene detto retta di regressione.

Osservazione

- *In generale non è detto che il grado sia esattamente ℓ:se prendo 10 punti allineati e cerco il polinomio di grado 5 di migliore approssimazione, trovo una retta, la retta di regressione*
- *Quando $\ell < n$ non sarà possibile, in generale, avere $\Pi_\ell(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$:è sufficiente prendere 3 punti non allineati (ovvero $n = 2$) e considerare la retta di regressione (ovvero $\ell = 1$)*

Quando $\ell = 1$ e $x_i \in \mathbb{R}$, si ha che $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$, dove a_0, a_1 sono i coefficienti incogniti.

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1), *e* $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$ *è la retta di regressione.*

Quando $\ell = 1$ e $x_i \in \mathbb{R}$, si ha che $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$, dove a_0, a_1 sono i coefficienti incogniti.

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1), e $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$ è la retta di regressione.

Quando $\ell = 1$ e $x_i \in \mathbb{R}$, si ha che $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$, dove a_0, a_1 sono i coefficienti incogniti.

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1)*, e* $\Pi_1(x) = a_0 + a_1 x$ *è la retta di regressione.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Retta di regressione

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$. Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0\ :\ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1). Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Retta di regressione

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ :\ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1). Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Retta di regressione

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ : \ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1).
Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0,b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ :\ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1).
Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0,a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0,a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Retta di regressione

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ : \ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1).
Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1 x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1 x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Retta di regressione

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ \ :\ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1). Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1 x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1 x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Si osserva che

$$\lim_{b_0^2+b_1^2\to\infty} \Phi(b_0, b_1)$$

comunque si fissino (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.Per definizione di limite,

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0 \ \ :\ b_0^2 + b_1^2 > R^2 \Longrightarrow \Phi(b_0, b_1) > M$$

quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste almeno un punto di minimo (a_0, a_1). Le coordinate del punto sono soluzione di $\nabla\Phi(a_0, a_1) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

da cui

$$2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i] = 0, \qquad 2\sum_{i=0}^{n}[(a_0 + a_1x_i) - y_i]x_i = 0$$

e infine

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^n [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),*e* $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati si calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),*e* $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),e $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),e $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),*e* $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^n [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2),*e* $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *è il polinomio di grado 2 di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Nel caso in cui $\ell = 2$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$,i coefficienti del polinomio di grado 2 di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare 3×3

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo (a_0, a_1, a_2)*,e* $\Pi_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *è il polinomio di grado* 2 *di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da 3 variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $1 < \ell < n$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$, i coefficienti del polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati si calcolano risolvendo il sistema lineare $(\ell+1) \times (\ell+1)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, ..., b_\ell) = \sum_{i=0}^n [(b_0 + b_1 x_i + ... + b_\ell x_i^\ell) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo $(a_0, a_1, ..., a_\ell)$, *e* $\Pi_\ell(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_\ell x^\ell$ *è il polinomio di grado* ℓ *di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da $\ell + 1 > 2$ variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $1 < \ell < n$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$, i coefficienti del polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare $(\ell+1) \times (\ell+1)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, ..., b_\ell) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + ... + b_\ell x_i^\ell) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo $(a_0, a_1, ..., a_\ell)$, e $\Pi_\ell(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_\ell x^\ell$ è il polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione.

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da $\ell + 1 > 2$ variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $1 < \ell < n$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$, i coefficienti del polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare $(\ell+1) \times (\ell+1)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, ..., b_\ell) = \sum_{i=0}^n [(b_0 + b_1 x_i + ... + b_\ell x_i^\ell) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo $(a_0, a_1, ..., a_\ell)$, e $\Pi_\ell(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_\ell x^\ell$ è il polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione.

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da $\ell + 1 > 2$ variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $1 < \ell < n$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$, i coefficienti del polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, ..., b_\ell) = \sum_{i=0}^{n} [(b_0 + b_1 x_i + ... + b_\ell x_i^\ell) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo $(a_0, a_1, ..., a_\ell)$, *e* $\Pi_\ell(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_\ell x^\ell$ *è il polinomio di grado* ℓ *di migliore approssimazione.*

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da $\ell + 1 > 2$ variabili.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione

Nel caso in cui $1 < \ell < n$ e gli $x_i \in \mathbb{R}$, i coefficienti del polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadratisi calcolano risolvendo il sistema lineare $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1 & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^\ell \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell & \sum_{i=0}^n x_i^{\ell+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^\ell y_i \end{pmatrix}$$

Teorema

Data la funzione

$$\Phi(b_0, b_1, ..., b_\ell) = \sum_{i=0}^n [(b_0 + b_1 x_i + ... + b_\ell x_i^\ell) - y_i]^2$$

questa ha un unico punto di minimo $(a_0, a_1, ..., a_\ell)$, e $\Pi_\ell(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_\ell x^\ell$ è il polinomio di grado ℓ di migliore approssimazione.

La dimostrazione è perfettamente analoga alla precedente, la sola differenza è che qui Φ dipende da $\ell + 1 > 2$ variabili.

Osservazione

Nel caso in cui $\ell = n$, il polinomio di migliore approssimazione di grado ℓ nel senso dei minimi quadrati coincide con il polinomio interpolatore.

Osservazione

Vedremo più avanti come si ottengono queste equazioni, dette anche equazioni normali

Osservazione

Nel caso in cui $\ell = n$, il polinomio di migliore approssimazione di grado ℓ nel senso dei minimi quadrati coincide con il polinomio interpolatore.

Osservazione

Vedremo più avanti come si ottengono queste equazioni, dette anche equazioni normali

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$*, dove* A *è una matrice* $n \times n$*, allora per ogni* $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$*, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$*, allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$*, dove* A *è una matrice* $n \times n$*, allora per ogni* $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$*, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$*, allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$, *dove* A *è una matrice* $n \times n$, *allora per ogni* $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$, *allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$, *dove* A *è una matrice* $n \times n$, *allora per ogni* $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$*, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \mid Y].$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$, *allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$, *dove* A *è una matrice* $n \times n$, *allora per ogni* $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$, *allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$*, dove* A *è una matrice* $n \times n$*, allora per ogni* $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste* ***uno ed un solo*** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$*, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$*, allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso determinato)

È ben noto che se $\det A \neq 0$*, dove* A *è una matrice* $n \times n$*, allora per ogni* $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *esiste uno ed un solo* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$A \cdot x = Y.$$

Osservazione (Caso sub-determinato)

Presa una matrice $m \times n$ *con* $m < n$*, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una soluzione (non unica) di* $A \cdot x = Y$ *è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y]\,.$$

Osservazione

In questo caso sub-determinato, se $\mathrm{rango}[A] = m$*, allora certamente possiamo concludere che almeno esistono soluzioni.*

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \mid Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \mid Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite, ovvero nel caso sovra-determinato, la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica. Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite, ovvero nel caso sovra-determinato, la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica. Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ *non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.*

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica. Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Osservazione (Caso sovra-determinato)

Presa infine una matrice $m \times n$ con $m > n$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè

- *esista una soluzione unica di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = n = \min\{m, n\}.$$

- *esista una soluzione (non unica) di $A \cdot x = Y$ è che*

$$\mathrm{rango}[A] = \mathrm{rango}\,[A \,|\, Y] = \ell < n.$$

Osservazione

Nel caso in cui le equazioni superano in numero le incognite,ovvero nel caso sovra-determinato,la condizione $\mathrm{rango}[A] = n$ non basta a garantire l'esistenza d'una soluzione.

Osservazione

In generale, questi problemi sovradeterminati non hanno soluzione classica.Vale quindi la pena di introdurre una soluzione debole nel senso dei minimi quadrati

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$, dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato, se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \to +\infty \qquad quando \quad \|z\|_2 \to \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$, dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato, se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \to +\infty \qquad \textit{quando} \quad \|z\|_2 \to \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati *del sistema lineare $A \cdot x = b$, dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato, se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ ovvero se*

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \to +\infty \qquad \textit{quando} \quad \|z\|_2 \to \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$,dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato,se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \to +\infty \qquad quando \quad \|z\|_2 \to \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$,dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato,se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \rightarrow +\infty \qquad quando \quad \|z\|_2 \rightarrow \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Supponiamo che A sia una matrice $m \times n$, con $m > n$, di rango n

Definizione

Il vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $A \cdot x = b$,dove $b \in \mathbb{R}^m$ è un vettore fissato,se minimizza $\|A \cdot z - b\|_2$ovvero se

$$\|A \cdot x_0 - b\|_2 \leq \|A \cdot z - b\|_2, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m.$$

Che tale soluzione esista segue dal fatto che

$$\|A \cdot z - b\|_2 \rightarrow +\infty \qquad quando \quad \|z\|_2 \rightarrow \infty.$$

e dunque, per il corollario del Teorema di Weierstrass, esiste il minimo assoluto.

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione x_0*
2. *Se x_1 è un'altra soluzione, allora $Ax_0 = Ax_1$.*
3. *Il residuo $r(x) = b - Ax_0$ è univocamente determinato e soddisfa l'equazione $A^T x = 0$*
4. *Ogni soluzione x_0 del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

$$A^T A x = A^T x$$

e viceversa.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione* x_0
2. *Se* x_1 *è un'altra soluzione, allora* $Ax_0 = Ax_1$.
3. *Il residuo* $r(x) = b - Ax_0$ *è univocamente determinato e soddisfa l'equazione* $A^T x = 0$
4. *Ogni soluzione* x_0 *del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

$$A^T Ax = A^T x$$

e viceversa.

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione* x_0
2. *Se* x_1 *è un'altra soluzione, allora* $Ax_0 = Ax_1$*.*
3. *Il residuo* $r(x) = b - Ax_0$ *è univocamente determinato e soddisfa l'equazione* $A^T x = 0$
4. *Ogni soluzione* x_0 *del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

$$A^T Ax = A^T x$$

e viceversa.

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione* x_0
2. *Se* x_1 *è un'altra soluzione, allora* $Ax_0 = Ax_1$.
3. *Il residuo* $r(x) = b - Ax_0$ *è univocamente determinato e soddisfa l'equazione* $A^T x = 0$
4. *Ogni soluzione* x_0 *del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

$$A^T A x = A^T x$$

e viceversa.

Teorema

Il problema lineare di approssimazione

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|A \cdot z - b\|_2$$

1. *ammette almeno una soluzione* x_0
2. *Se* x_1 *è un'altra soluzione, allora* $Ax_0 = Ax_1$.
3. *Il residuo* $r(x) = b - Ax_0$ *è univocamente determinato e soddisfa l'equazione* $A^T x = 0$
4. *Ogni soluzione* x_0 *del problema di approssimazione è anche soluzione delle equazioni normali*

   $$A^T Ax = A^T x$$

   e viceversa.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \mid r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \mid r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \,|\, r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \,|\, r^T z = 0,\; z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\; r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \,|\, r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \,|\, r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \,|\, r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp &= \{r \mid r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \mid r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Sia dato il sottospazio

$$L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

e si consideri il suo ortogonale

$$\begin{aligned} L^\perp \quad &= \{r \,|\, r^T z = 0,\ z \in L\} \\ &= \{r \,|\, r^T A = 0\} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbb{R}^m = L \oplus L^\perp$,allora

$$b = s + r, \qquad s \in L,\ r \in L^\perp.$$

(i) L'esistenza del minimo segue dall'osservazione fatta in precedenza (Corollario del Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua su un compatto).

(ii) Preso $s \in L$, esiste certamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax_0 = s$.Inoltre

$$A^T b = A^T(s + r) = A^T s = A^T A x_0$$

ovvero x_0 è soluzione delle equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^\perp$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^\perp$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T A x$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^\perp$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^\perp$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^\perp$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione. Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^\perp$ mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned}
\|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\
&= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\
&\geq \|Ax_0 - b\|_2^2
\end{aligned}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$ mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^\perp$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^\perp$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^Tb = A^TAx$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(ii) (continua) presa ora x_1 un'altra soluzione di $A^T b = A^T Ax$,si ha che

$$b = s + r, \quad s = Ax_1, \quad r = b - Ax_1, \quad s \in L, r \in L^{\perp}$$

e data l'unicità della decomposizione $b = s + r$, si ha $Ax_0 = Ax_1$.

(iii) Segue dall'unicità della decomposizione $b = s + r$.

(iv) Proviamo che x_0, soluzione delle equazioni normali, è soluzione del problema di approssimazione.Si prenda a tal fine $x \in \mathbb{R}^n$,e si osservi che $r = Ax_0 - b \in L^{\perp}$mentre $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) \in L$,e dunque $r^T(Ax - Ax_0) = 0$ da cui segue per il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|(Ax - Ax_0) + (Ax_0 - b)\|_2^2 \\ &= \|Ax - Ax_0\|_2^2 + \|Ax_0 - b\|_2^2 \\ &\geq \|Ax_0 - b\|_2^2 \end{aligned}$$

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax-b)^T(Ax-b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & (Ax - b)^T (Ax - b) \\ & = & (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ & = & x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{array}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari) e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i\right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax-b)^T(Ax-b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \rightarrow 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \rightarrow x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

(iv) (continua) Resta da provare che una soluzione del problema di minimo risolve le equazioni normali. Il funzionale in esame è il seguente

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right)^2$$

che si può scrivere come

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ax-b)^T(Ax-b) \\ &= (Ax)^T Ax - (Ax)^T b - b^t Ax + b^t b \\ &= x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

(si osservi che $(Ax)^T b = [(Ax)^T b]^T = b^T Ax$: sono matrici 1×1, cioè scalari)e i suoi punti stazionari– tra cui si trovano i minimi– sono le soluzioni di (si osservi che $x \to 2b^T Ax$ è un operatore lineare, mentre per la forma quadratica $x \to x^T A^T Ax$ si rimanda alla pagina seguente)

$$\nabla F(x) = 2x^T A^T A - 2b^T A = 0$$

ovvero (se $\nabla F = 0$ allora anche $(\nabla F)^T = 0$)

$$A^T Ax = A^T b$$

che sono le equazioni normali.

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T Ax = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T A x = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T A x = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T A x = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T A x = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Osservazione

Nella dimostrazione del punto (iv) precedente s'è fatto uso del fatto che il gradiente dell'applicazione

$$G : x \longmapsto x^T A^T Ax = \|Ax\|^2$$

è dato da $\nabla G(x) = 2x^T A^T A$. *Questo segue dal fatto che* $G(x) = Q(P(x))$, *dove*

$$\begin{array}{lcl} P(x) = Ax & \Longrightarrow & J_P(x) = A \\ Q(z) = z^T z = \|z\|^2 & \Longrightarrow & \nabla Q(z) = 2z^T \end{array}$$

e quindi

$$\nabla G(x) = \nabla Q(P(x)) \cdot J_P(x) = 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A.$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva

Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$

Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1}(A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva

Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$

Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui rango(A) = n, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

  mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui rango(A) = n, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1}(A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T A x = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, **infatti***

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T A x = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$,la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1}(A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui rango$(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$, la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare

- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Pseudo inversa di Moore-Penrose

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A *matrice* $m \times n$ *con* $m > n$,*la matrice* $(A^T A)^{-1} A^T$ *viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice* A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice* A *è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ *non si può fare*

- *Nel caso in cui* A *è una matrice* $n \times n$ *di rango* n, *l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversa* *infatti* $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Si consideri la matrice A introdotta in precedenza avente m righe e n colonne, $m > n$.

Supponiamo che $rango(A) = n$

Allora $A^T A$ è una matrice $n \times n$, simmetrica, non singolare e definita positiva
Allora esiste l'inversa $(A^T A)^{-1}$
Allora

$$A^T Ax = A^T b \Longrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Definizione

Nel caso in cui $rango(A) = n$, A matrice $m \times n$ con $m > n$,la matrice $(A^T A)^{-1} A^T$ viene detta Inversa di Moore-Penrose della matrice A.

Osservazione

- *L'inversa di Moore-Penrose della matrice A è un'inversa sinistra, infatti*

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

  mentre $A \cdot (A^T A)^{-1} A^T$ non si può fare
- *Nel caso in cui A è una matrice $n \times n$ di rango n, l'inversa di Moore Penrose coincide con l'usuale inversainfatti $(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1}$.*

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la retta* $r(x) = \alpha + \beta x$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (r(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La retta esiste, come si è già visto in teoria. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la retta* $r(x) = \alpha + \beta x$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (r(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La retta esiste, come si è già visto in teoria. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la retta* $r(x) = \alpha + \beta x$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (r(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La retta esiste, come si è già visto in teoria. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la retta* $r(x) = \alpha + \beta x$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (r(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La retta esiste, come si è già visto in teoria. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$ e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix},$$

dove la matrice a sinistra è simmetrica (in questo caso diagonale).

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si vuole determinare il piano $f(x) = f(x', x'') = \alpha + \beta x' + \gamma x''$ *che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti*

$x_i = (x_i', x_i'')$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(0,0)$
$y_i = f(x_i)$	3	6	5	0

Il sistema $AX = b$ da risolvere è (nel senso dei minimi quadrati) il seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ ha rango 3, cioè massimo. (A differenza del caso di una variabile, per avere questo non è sufficiente avere punti del piano distinti ma occorre che ce ne siano tre non allineati).
Le equazioni normali $A^T AX = A^T b$ sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Si noti ancora che la matrice a sinistra è simmetrica definita positiva.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si vuole determinare il piano $f(x) = f(x', x'') = \alpha + \beta x' + \gamma x''$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti

$x_i = (x_i', x_i'')$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(0,0)$
$y_i = f(x_i)$	3	6	5	0

Il sistema $AX = b$ da risolvere è (nel senso dei minimi quadrati) il seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ ha rango 3, cioè massimo. (A differenza del caso di una variabile, per avere questo non è sufficiente avere punti del piano distinti ma occorre che ce ne siano tre non allineati).

Le equazioni normali $A^T AX = A^T b$ sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Si noti ancora che la matrice a sinistra è simmetrica definita positiva.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si vuole determinare il piano $f(x) = f(x', x'') = \alpha + \beta x' + \gamma x''$ *che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti*

$x_i = (x_i', x_i'')$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(0,0)$
$y_i = f(x_i)$	3	6	5	0

Il sistema $AX = b$ da risolvere è (nel senso dei minimi quadrati) il seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ ha rango 3, cioè massimo. (A differenza del caso di una variabile, per avere questo non è sufficiente avere punti del piano distinti ma occorre che ce ne siano tre non allineati).

Le equazioni normali $A^T AX = A^T b$ sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Si noti ancora che la matrice a sinistra è simmetrica definita positiva.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Si vuole determinare il piano $f(x) = f(x', x'') = \alpha + \beta x' + \gamma x''$ che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati i punti

$x_i = (x_i', x_i'')$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(2,1)$	$(0,0)$
$y_i = f(x_i)$	3	6	5	0

Il sistema $AX = b$ da risolvere è (nel senso dei minimi quadrati) il seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ ha rango 3, cioè massimo. (A differenza del caso di una variabile, per avere questo non è sufficiente avere punti del piano distinti ma occorre che ce ne siano tre non allineati).
Le equazioni normali $A^T AX = A^T b$ sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Si noti ancora che la matrice a sinistra è simmetrica definita positiva.

Le equazioni normali hanno come soluzione (unica, essendo $rk(A^T A) = rk(A) = 3$)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -6 \\ 73 \\ 101 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione è data da

$$f(x', x'') = \frac{1}{50}(-6 + 73x' + 101x'').$$

Le equazioni normali hanno come soluzione (unica, essendo $rk(A^T A) = rk(A) = 3$)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -6 \\ 73 \\ 101 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione è data da

$$f(x', x'') = \frac{1}{50}(-6 + 73x' + 101x'').$$

Le equazioni normali hanno come soluzione (unica, essendo $rk(A^T A) = rk(A) = 3$)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -6 \\ 73 \\ 101 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione è data da

$$f(x', x'') = \frac{1}{50}(-6 + 73x' + 101x'').$$

Esercizio

Si determini la parabola $f(x) = a + bx + cx^2$ *che interpola ne senso dei minimi quadrati i nodi*

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	0	-3	-5

Si tratta di risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Si determini la parabola $f(x) = a + bx + cx^2$ *che interpola ne senso dei minimi quadrati i nodi*

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	0	-3	-5

Si tratta di risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*
$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$
2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto. Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1/2	1/2	2	7/2	7/2

1. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

2. *scrivere le equazioni normali.*

La parabola esiste, come si è già visto.Per quanto riguarda le equazioni normali, è sufficiente porre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$ e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$ e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T Ax = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Così facendo, il funzionale da minimizzare risulta $\|Ax - b\|^2$e di conseguenza le equazioni normali sono

$$A^T A x = A^T b$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T A x = A^T b$$

  osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.
- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T Ax = A^T b$$

osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.

- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T A x = A^T b$$

osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.

- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T A x = A^T b$$

osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.

- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione x_0 nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$*

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

  $$A^T Ax = A^T b$$

  osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2, dunque il sistema è risolubile.
- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T Ax = A^T b$$

osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.

- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento:

- La matrice A ha rango 2,
- Scrivete la matrice trasposta A^T (anch'essa di rango 2)
- si cerchi la soluzione delle equazioni normali

$$A^T Ax = A^T b$$

  osservando che $A^T A$ è una matrice quadrata di rango 2,dunque il sistema è risolubile.
- Una volta calcolata la soluzione delle equazioni normali, si calcoli la norma del residuo

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione x_0 nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto $\|Ax_0 - b\|$*

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Determinare

- *la soluzione* x_0 *nel senso dei minimi quadrati*
- *la norma del resto* $\|Ax_0 - b\|$

per il sistema sovradeterminato $Ax = b$ *dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Esercizio

Dati i punti

x_i	-1	1	2	3
y_i	0	2	4	0

1. *determinare il polinomio interpolatore*
2. *determinare la retta di regressione, scrivendo le equazioni normali*
3. *determinare la parabola* $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *che minimizza*

$$\sum_{i=1}^{5} (p(x_i) - y_i)^2$$

scrivendo le equazioni normali.