Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì , 27/04/2009

Formula di Newton per il polinomio interpolatore: differenze divise

Data una funzione f, sia $\Pi_n f(x)$ il polinomio di grado al più n che interpola gli $n+1$ punti $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, ..., n\}$ sul grafico di f, quindi $y_i := f(x_i) = \Pi_n f(x_i)$.

Vogliamo calcolare $\Pi_n f(x)$ a partire da $\Pi_{n-1} f(x)$ (quindi considerando aggiungendo un punto di interpolazione) ponendo:

$$\Pi_n f(x) = \Pi_{n-1} f(x) + Q_n(x). \tag{1.1}$$

Si osservi che:

- Q_n è un polinomio di grado al più n,
- $Q_n(x_i) = \Pi_n f(x_i) - \Pi_{n-1} f(x_i) = y_i - y_i = 0,\ i = 0, ..., n-1,$

quindi:

$$Q_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) = a_n\, \omega_n(x), \tag{1.2}$$

dove $\omega_n(x) := \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ è il polinomio nodale di grado n.

Definizione

Il coefficiente a_n viene detto n-esima differenza divisa di Newton. Si ha:

$$a_n = f[x_0, ..., x_n] := \frac{f(x_n) - \Pi_{n-1} f(x_n)}{\omega_n(x_n)}. \tag{1.3}$$

Abbiamo quindi:

$$\Pi_n f(x) = \Pi_{n-1} f(x) + f[x_0, ..., x_n]\, \omega_n(x). \tag{1.4}$$

Osservazione

Data $f \in C^{n+1}([a,b])$ *e considerati* $x_i \in [a,b]$, $i = 0, \ldots, n$, *comunque si prenda* $x \neq x_i$, *esiste* $\xi \in [a,b]$ *tale che*

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Questo segue immediatamente da (1.3) e (**??**).

Ponendo $\omega_0 = 1$ e $y_0 = f(x_0) = f[x_0]$, dalla (1.4) si ottiene per ricorsione su n il seguente

Teorema

Dati $n+1$ nodi d'interpolazione $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, vale la relazione

$$\begin{aligned}
\Pi_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\omega_k(x) \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&\quad + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Questa è detta formula (delle differenze divise) di Newton per il polinomio interpolatore.

Osservazione

Abbiamo dunque che il polinomio $\Pi_n f(x) \in \mathbb{P}_n$ si scrive come combinazione lineare dei polinomi nodali $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n$, che è come dire che essi sono generatori dello spazio $\mathbb{P}_n$. Siccome questo spazio ha dimensione $n+1$, essi costituiscono una base di questo spazio. Indichiamo tale base ordinata con

$$\Omega := (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}). \tag{1.5}$$

Costruzione del polinomio interpolatore

(Costruzione del polinomio interpolatore)

Poniamo $y_0 = f[x_0]$, $\omega_0 = 1$, $\omega_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k)$ *per* $j = 1, ..., n$ *e si ha*

$$
\begin{aligned}
\Pi_0 f(x) &= f[x_0] = f[x_0]\omega_0(x) \\
\Pi_1 f(x) &= \Pi_0 f(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
&= f[x_0]\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) \\
\Pi_2 f(x) &= \Pi_1 f(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= f[x_0]\omega_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) \\
.... & \\
\Pi_n f(x) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_j]\omega_j(x),
\end{aligned}
$$

che è la forma di Newton del polinomio interpolatore.

Osservazione

Da (1.3) o dalla formula di Newton segue che:

- *le differenze divise non dipendono dall'ordine dei punti, cioè sono invarianti rispetto ad una permutazione degli indici dei nodi (funzione simmetrica).*
- *le differenze divise dipendono linearmente dai valori $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$, cioè, se $f = \alpha g + \beta h$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \alpha g[x_0, \ldots, x_n] + \beta h[x_0, \ldots, x_n].$$

Costruzione delle differenze divise

Teorema

Siano:

- $\Pi_{0,1,\dots,n-1} f(x)$ *il polinomio interpolatore di* f *nei nodi* $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$,
- $\Pi_{1,\dots,n} f(x)$ *il polinomio interpolatore di* f *nei nodi* $x_1, ..., x_n$.

Allora:

$$\begin{aligned}\Pi_n f(x) &= \frac{1}{x_n - x_0} \det \begin{pmatrix} \Pi_{1,\dots,n} f(x) & \Pi_{0,1,\dots,n-1} f(x) \\ (x - x_n) & (x - x_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Pi_{1,\dots,n} f(x)\,(x - x_0) - \Pi_{0,1,\dots,n-1} f(x)\,(x - x_n)}{x_n - x_0}.\end{aligned}$$

Infatti chiamiamo $P(x)$ la differenza fra il membro di destra (uno dei due...) e quello di sinistra. Si ha

- $P(x)$ è un polinomio di grado al più n;
- $P(x_0) = P(x_n) = 0$;
- $P(x_i) = \Pi_{1,\dots,n}(x_i) = \Pi_{0,1,\dots,n-1}(x_i) = 0$ quando $i = 1, ..., n-1$.

Dunque $P(x)$ è un polinomio di grado al più n che si annulla in $n+1$ punti, quindi è nullo e la formula è provata. $\square$

Costruzione delle differenze divise

Osservazione

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Pi_n f(x) &= f[x_0, \ldots, x_n]\omega_n(x) + (\textit{termini di grado } < n), \\
\Pi_{1,\ldots,n} f(x)(x - x_0) &= f[x_1, \ldots, x_n]\omega_n(x) + (\textit{termini di grado } < n), \\
\Pi_{0,1,\ldots,n-1} f(x)(x - x_n) &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}]\omega_n(x) + (\textit{termini di grado } < n),
\end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{\Pi_{1,\ldots,n} f(x)(x - x_0) - \Pi_{0,1,\ldots,n-1} f(x)(x - x_n)}{x_n - x_0} = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}\omega_n(x) + R(x),$$

ove con $R(x)$ abbiamo indicato i termini di grado minore di n.
Confrontando i coefficienti di x^n nella formula data nel teorema sopra, si ottiene la relazione

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Come calcolare le differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 = f[x_0] & & & \\
x_1 & y_1 = f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & y_2 = f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
x_3 & y_3 = f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
\dots & & & &
\end{array}
$$

dove:

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$,

$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$, $\quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$,

$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$, $\quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_0}$, $\quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$,

...

Per calcolare ciascun elemento sono necessarie 2 sottrazioni ed 1 divisione, quindi per $n+1$ nodi servono n^2 sottrazioni ed $n^2/2$ divisioni, a meno di termini di ordine inferiore.

Abbiamo già assorvato che le differenze divise dipendono linearmente da $(y_0, \dots, y_n)^T = (f(x_0), \dots, f(x_n))^n = (f[x_0], \dots, f[x_0, ..., x_n])^T$, cioè l'applicazione

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni Y := (y_0, \dots, y_n)^T \quad \longmapsto \quad \eta := (f[x_0], \dots, f[x_0, ..., x_n]) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

è lineare. Quest'applicazione è chiarmente invertibile e sia $\hat{L}$ la matrice associata alla sua inversa. Questo significa che:

$$\hat{L}\eta = Y \quad \text{ovvero} \quad \eta = \hat{L}^{-1}Y.$$

La matrice $\hat{L}$ è la seguente:

$$\hat{L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) & 0 \\ 1 & x_3 - x_0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) & (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{pmatrix}.$$

Che legame c'è tra $\hat{L}$ e la matrice A di Vandermonde?
Possiamo scrivere $A = \hat{L}\hat{U}$ con $\hat{U}$ triangolare superiore con diagonale unitaria?

Esercizio

Si provi prima che:

$$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j).$$

Quindi, usando la forma di Lagrange del polinomio interpolatore, si mostri che:

$$\Pi_n f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i).$$

Esercizio

Confrontando la forma di Newton del polinomio interpolatore con quella data ell'esercizio precedente, si provi che:

$$f[x_0, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Esercizio

Se $f = gh$ è il prodotto di due funzioni g e h, allora vale la formula (detta di Leibniz)

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=1}^{n} g[x_0, \dots, x_j] h[x_j, \dots, x_n].$$

Un problema operativo

Problema

Quanto costa, in termini di operazioni, calcolare il polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ in un punto $\hat{x}$?

Non è difficile calcolarlo, in quanto:

- per calcolare a_0, 0 operazioni
- per calcolare $a_1\hat{x}$, 1 moltiplicazione
- per calcolare $a_2\hat{x}^2$, 2 moltiplicazioni
- ...
- per calcolare $a_n\hat{x}^n$, n moltiplicazioni

Dunque in questo sono necessarie

$$\begin{cases} n & \textit{somme} \\ 0 + 1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} & \textit{moltiplicazioni} \end{cases}$$

Naturalmente, se si suppone che una volta calcolato $\hat{x}^i$ si tenga il risultato in memoria, allora per calcolare $\hat{x}^{i+1}$ basta una sola operazione e quindi sono necessarie

$$\begin{cases} n & \textit{somme} \\ 0 + 1 + 2 + 2 \ldots + 2 = 2n - 1 & \textit{moltiplicazioni} \end{cases}$$

Un problema operativo

Ma si può anche risparmiare ulteriormente: se si scrive il polinomio nel modo seguente

$$p(x) = ((...(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + ...)x + a_1)x + a_0,$$

vediamo che sono richieste

$$\begin{cases} n & \textit{somme} \\ n & \textit{moltiplicazioni} \end{cases}$$

e quindi abbiamo ridotto in modo consistente il lavoro necessario alla valutazione del polinomio.

Condizioni sulle derivate di ordine superiore: polinomio di Hermite

Sia assegnata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile quanto basta, e supponiamo assegnati $n+1$ nodi $x_i \in [a, b]$ distinti. Il problema che abbiamo risolto sino ad ora è il seguente

Problema (1)

Determinare il polinomio di grado minimo che in corrispondenza a x_i assume il valore $f(x_i)$, ovvero

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

Il Problema (1) ha soluzione unica, come s'è visto in precedenza, e il polinomio soluzione sta in $\mathbb{P}_n$, ovvero ha grado al più n (ho $n+1$ condizioni e quindi devo avere $n+1$ parametri liberi).

Problema (2)

Determinare il polinomio di grado minimo che in corrispondenza a x_i assume il valore $f(x_i)$, ed inoltre la sua derivata assume il valore $f'(x_i)$ ovvero

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	...	$f'(x_n)$

Il problema (2) ha soluzione unica, detto polinomio osculatore di Hermite, ed il polinomio soluzione sta in $\mathbb{P}_{2n+1}$, ovvero ha grado al più $2n+1$ (ho $2n+2$ condizioni e quindi devo avere $2n+2$ parametri liberi).

Problema (3)

Determinare il polinomio di grado minimo che in corrispondenza a x_i assume il valore $f(x_i)$, la sua derivata assume il valore $f'(x_i)$ e la sua derivata seconda assume il valore $f''(x_i)$ ovvero

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	...	$f'(x_n)$
$f''(x_0)$	$f''(x_1)$	...	$f''(x_n)$

Il problema (3) ha soluzione unica ed il polinomio soluzione sta in $\mathbb{P}_{3n+2}$, ovvero ha grado al più $3n+2$ (ho $3n+3$ condizioni e quindi devo avere $3n+3$ parametri liberi).

In generale

Problema (4)

Dati $n+1$ punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, determinare il polinomio $p(x)$ di grado minimo che in corrispondenza a ogni x_i valga

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 1, \ldots, m_i.$$

Il problema (4) ha soluzione unica ed il polinomio soluzione sta in $\mathbb{P}_{N-1}$, ovvero ha grado al più $N-1$, dove $N = \sum_{i=0}^{n} m_i$ (ho N condizioni e quindi devo avere N parametri liberi).

ATTENZIONE

Problema (5)

Determinare il polinomio di grado minimo che in corrispondenza a x_i, $i = 0, 1, 2$ soddisfa

x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$		$f(x_2)$
	$f'(x_1)$	

In questo caso si ha a che fare con 3 vincoli, e dunque il polinomio incognito ha grado al più 2 (servono 3 parametri liberi). In questo caso non è detto che la soluzione esista e sia unica, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio

-1	0	1
$f(-1)=0$		$f(1)=0$
	$f'(0)=0$	

Si ha come soluzione il polinomio nullo, ma anche $p(x)=x^2-1$ *e in generale* $p(x)=c(x^2-1)$ *con* $c\in\mathbb{R}$.

Esempio

-1	0	1
$f(-1)=0$		$f(1)=0$
	$f'(0)=1$	

Non si hanno come soluzione polinomi di secondo grado (chiaramente si hanno polinomi di terzo grado che soddisfano le condizioni richieste e di questi ce ne sono infiniti).

Esercizio

Determinare l'equazione del polinomio che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	2	-2	0

Esercizio

Determinare l'equazione del polinomio che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	2	-2	0

Esercizio

Determinare l'equazione del polinomio che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	-2	-1	0	2
y_i	0	2	0	8

Esercizio

Calcolare il polinomio che interpola la funzione $f(x) = x^4 - 3$ *nei nodi* $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ *e* $x_3 = 1$.

Esercizio

Calcolare il polinomio che interpola la funzione $f(x) = x^4 - 3$ *nei nodi* $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ *e* $x_4 = 2$.

Esercizio

Determinare l'equazione del polinomio che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	3	6	10

Esercizio

Determinare l'equazione del polinomio che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	5	14	25

Esercizio

Dati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$ *e* $x_3 = 3\pi/2$ *e la funzione* $f(x) = \sin x$,

- *calcolate il polinomio* $\Pi_3 f(x)$ *che interpola* $f(x)$ *nei nodi* x_i.
- *calcolare* $f(\pi/3) - \Pi_3 f(\pi/3)$
- *calcolate* $\|f - \Pi_3 f\|_\infty = \max_{x \in [0, 3\pi/2]} |f(x) - \Pi_3 f(x)|$
- *scegliendo* 3 *punti opportunamente tra quelli sopra introdotti, si calcoli* $\Pi_2 f(x)$ *in modo che* $|f(5\pi/4) - \Pi_2 f(5\pi/4)|$ *sia il minimo possibile.*

Esercizio

Dati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$ *e* $x_3 = 3\pi/2$ *e la funzione* $f(x) = \cos x$,

- *calcolate il polinomio* $\Pi_3 f(x)$ *che interpola* $f(x)$ *nei nodi* x_i.
- *calcolate* $f(2\pi/3) - \Pi_3 f(2\pi/3)$
- *calcolate* $\|f - \Pi_3 f\|_\infty = \max_{x \in [0, 3\pi/2]} |f(x) - \Pi_3 f(x)|$
- *scegliendo* 2 *punti opportunamente tra quelli sopra introdotti, si calcoli* $\Pi_1 f(x)$ *in modo che* $|f(3\pi/4) - \Pi_1 f(3\pi/4)|$ *sia il minimo possibile. In corrispondenza a quale coppia di punti si ha lo scarto massimo?*

Esercizio

Dati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, *determinate* $p(x_0)$, $p(x_1)$ *e* $p(x_3)$ *dove* $p(x)$ *è il polinomio interpolatore che soddisfa le seguenti condizioni*

$$p[x_2] = -19, \quad p[x_1, x_2] = -19, \quad p[x_0, x_1, x_2] = 0 \text{ e } p[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$$

Risposta: $p(x) = x^3 - 20x$

Esercizio

Dati i nodi $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ *e* $x_4 = 2$ *determinate* $p(x_0)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$ *e* $p(x_4)$ *dove* $p(x)$ *è il polinomio interpolatore che soddisfa le seguenti condizioni*

$$p[x_1] = 6, \quad p[x_2, x_3] = 0, \quad p[x_1, x_2, x_3] = -1, \quad p[x_0, x_1, x_2, x_3] = -2 \text{ e}$$

$$p[x_1, x_2, x_3, x_4] = 2$$

Risposta: $p(x) = x^4 - 2x^2 + x$

Complementi

Teorema

Sia $f \in C^n([a,b])$, e si consideri la funzione

$$g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}((x_n - x_{n-1})t_n + ... + (x_1 - x_0)t_1 + x_0)\, dt_n$$

Allora per ogni $(x_0, ..., x_n)$tale che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$ si ha

$$g_n(x_0, x_1, ..., x_n) = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

La funzione $g_n(x_0, x_1, ..., x_n)$, che è continua su tutto $[a,b]^{n+1}$, è definita anche nel caso in cui gli x_i non sono tutti distinti (è l'estensione continua della differenza divisa).

La dimostrazione è per induzione su n. Vediamo la base $n = 1$.

$$g_1(x_0, x_1) = \int_0^1 f'((x_1 - x_0)t_1 + x_0)\, dt_1 = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f'(s)\, ds = f[x_0, x_1]$$

Si è fatta la sostituzione $s = (x_1 - x_0)t_1 + x_0$. Si procede poi supponendo valga per n ...

Complementi

Osservazione

Dal teorema precedente segue, ad esempio, che

- $g_2(x,x,x) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} f^{(3)}(x)\,dt_3 = f^{(3)}(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 = \dfrac{f^{(3)}(x)}{3!}$
- $f[x_0,\dots,x_m,x,x,x] = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx} f[x_0,\dots,x_m,x,x] = \dfrac{1}{6}\dfrac{d^2}{dx^2} f[x_0,\dots,x_m,x]$
- ...

Teorema

(i) *Se $f \in C^{n+1}([a,b])$, allora esiste $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ t.c.*

$$f[x_0,\dots,x_n,x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ii) *Se $f \in C^{n+2}([a,b])$, allora esiste $\eta = \eta(x) \in (a,b)$ t.c.*

$$\frac{d}{dx} f[x_0,\dots,x_n,x] = f[x_0,\dots,x_n,x,x] = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}$$