

Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Giovedì , 23/04/2009

Approssimazione polinomiale di funzioni e dati

Problema

Data una funzione $f(x)$, ad esempio una funzione trascendente come può essere $f(x) = \sin x$, per poter operare sul computer su f è necessario **approssimare** la funzione f , ovvero

determinare una funzione $\tilde{f}$ di forma più semplice che possa essere utilizzata al posto di f . Le funzioni $\tilde{f}$ possono essere dei polinomi (o funzioni razionali, cioè quozienti di polinomi).

Osservazione

In questo corso studieremo l'approssimazione polinomiale.

Osservazione

L'approssimazione si utilizza

- *per approssimare funzioni $f(x)$ che non sono dei polinomi*
- *per approssimare numericamente gli integrali, ovvero*

$$\text{calcolare } \int_a^b \tilde{f}(x) dx \text{ in luogo di } \int_a^b f(x) dx$$

- *nota che sia una funzione in un numero finito di punti, determinare una funzione $\tilde{f}$ che modelli la "legge" che ha generato i dati.*

Approssimazione polinomiale di funzioni e dati

Che i polinomi siano semplici da manipolare è chiaro, ma che siano anche ottimi da un punto di vista dell'approssimazione segue dal seguente fondamentale teorema

Teorema (Stone-Weierstrass)

Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p_\varepsilon(x)$ tale che

$$\|f(x) - p_\varepsilon(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

Osservazione

Il teorema precedente assicura che una funzione continua può essere approssimata bene quanto si desidera con un opportuno polinomio, ma

- *non specifica di quale ordine si debba prendere il polinomio*
- *non specifica come costruirlo*

Nel seguito lavoreremo a rovescio: data una funzione, costruiremo un polinomio e cercheremo di stimare l'errore che si commette in un intervallo assegnato.

Interpolazione polinomiale

Problema (Polinomio passante per $(n + 1)$ punti)

Dati le $n + 1$ coppie $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$, determinare un polinomio Π_n di grado n (o inferiore) tale che

$$\Pi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

I punti $\{x_i\}_{i=0}^n$ sono detti **nod**i d'interpolazione.

Teorema

Dati $n + 1$ nodi distinti $\{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ e in corrispondenza $n + 1$ valori $\{y_i : i = 0, 1, \dots, n\}$, allora

esiste ed è **unico** il polinomio – di grado al più n – Π_n tale che

$$\Pi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Interpolazione polinomiale

Unicità: supponiamo che esistano due polinomi Π_n e $\tilde{\Pi}_n$ di grado al più n tali che

$$\Pi_n(x_i) = \tilde{\Pi}_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Allora il polinomio $\Pi_n(x) - \tilde{\Pi}_n(x)$

- ha grado al più n
- ha almeno $n + 1$ radici distinte, essendo

$$\Pi_n(x_i) - \tilde{\Pi}_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra, $\Pi_n - \tilde{\Pi}_n = 0$ identicamente.

Esistenza: Si consideri il polinomio di grado $\leq n$

$$\Pi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Imponendo le $n + 1$ condizioni $\Pi_n(x_i) = y_i$, si arriva al sistema lineare non omogeneo di $n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ incognite $\{a_i\}_{i=0}^n$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 & = & y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ & \vdots & \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 & = & y_n \end{array} \right. \iff A \cdot \xi = Y$$

dove $\xi = (a_0, \dots, a_n)^T$

Interpolazione polinomiale

Esaminando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \det A = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

detta **matrice di Vandermonde** associata al vettore $X = (x_0, \dots, x_n)^T$, si ha

$$\det A \neq 0 \iff x_i \neq x_j \text{ quando } i \neq j$$

ovvero quando i nodi d'interpolazione sono distinti.

La condizione $\det A \neq 0$ è poi necessaria e sufficiente – per il teorema di Rouché-Capelli – affinché il sistema lineare $A \cdot \xi = Y$ abbia una ed una sola soluzione, e questo conclude la dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 - x_0 & x_0^2 - x_0 x_0 & \dots & x_0^n - x_0 x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \dots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \dots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & \dots & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \prod_{0 < i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
\end{aligned}$$

Interpolazione polinomiale

Osservazione

- La dimostrazione precedente riduce la ricerca del polinomio alla risoluzione di un sistema lineare $A\xi = Y$, che ha soluzione $\xi = A^{-1}Y$.
- La matrice di Vandermonde prima introdotta tende ad essere mal condizionata, ovvero $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \gg 1$.

(Polinomi interpolatori di Lagrange)

Dati i nodi di interpolazione distinti $\{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ e in corrispondenza $n + 1$ valori (non necessariamente distinti) $\{y_i : i = 0, 1, \dots, n\}$, introduciamo dei polinomi $L_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$

- di grado n
- tali che $L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$

Questi polinomi hanno equazione, per $i = 0, 1, \dots, n$, data da

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{i \neq k=0}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Interpolazione polinomiale

(Costruzione del polinomio interpolatore)

A partire dai nodi di interpolazione distinti $\{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}$ e dagli $n + 1$ valori (non necessariamente distinti!) $\{y_i : i = 0, 1, \dots, n\}$, sono univocamente determinati i polinomi interpolatori di Lagrange $L_i(x)$ per $i = 0, \dots, n$.

Il polinomio Π_n di grado al più n passante per $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$ è dato da

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

e la verifica che questo è esattamente il polinomio cercato è immediata.

Osservazione

Dati $n + 1$ nodi in $[a, b]$, i polinomi di Lagrange $L_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ formano una base per $\mathbb{P}_n$, ovvero ogni polinomio di grado al più n si può rappresentare univocamente come combinazione lineare degli $L_i(x)$.

Esercizio

Dimostrare che $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ per ogni $x \in [a, b]$.

Suggerimento: preso $p(x) \in \mathbb{P}_n$, allora $p(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) L_i(x)$, $\forall x \in [a, b]$...

Interpolazione polinomiale

Esempio

Determinare l'equazione del polinomio di grado al più 2 che soddisfa le seguenti condizioni:

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Si procede costruendo i polinomi di Lagrange $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ dati da

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

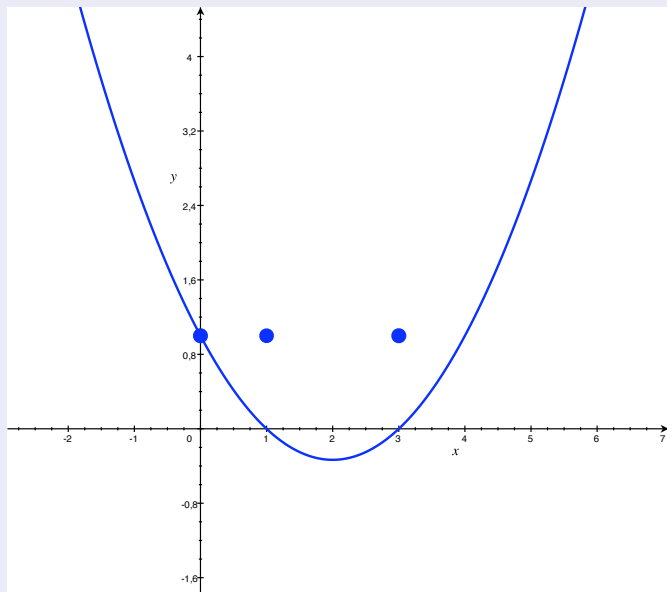
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

e si conclude con la costruzione del polinomio $\Pi_2(x)$ cercato

$$\begin{aligned}\Pi_2(x) &= L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x) \\ &= -\frac{1}{6}(5x^2 - 17x - 6).\end{aligned}$$

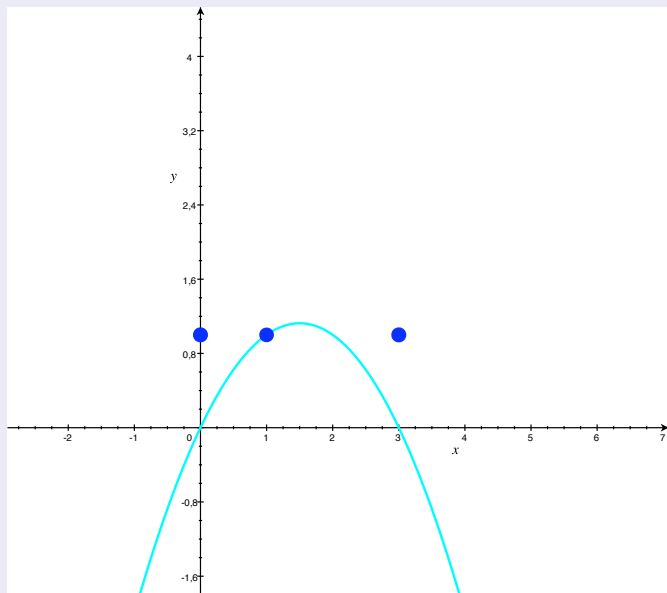
Interpolazione polinomiale

(Il polinomio L_0)



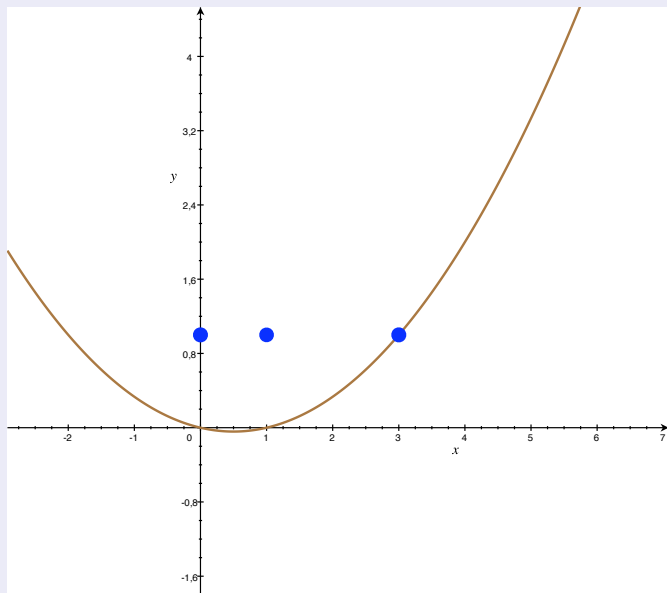
Interpolazione polinomiale

(Il polinomio L_1)



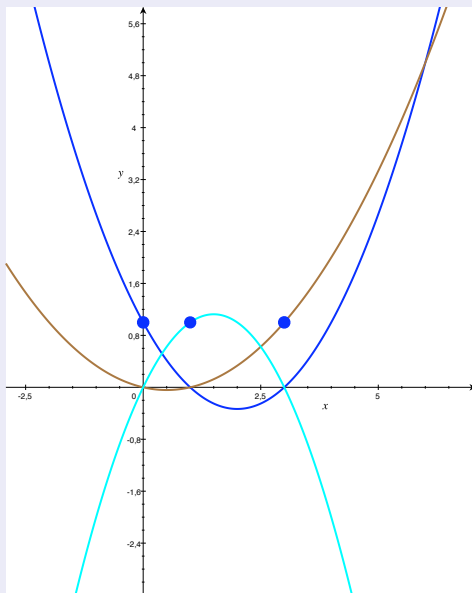
Interpolazione polinomiale

(Il polinomio L_2)



Interpolazione polinomiale

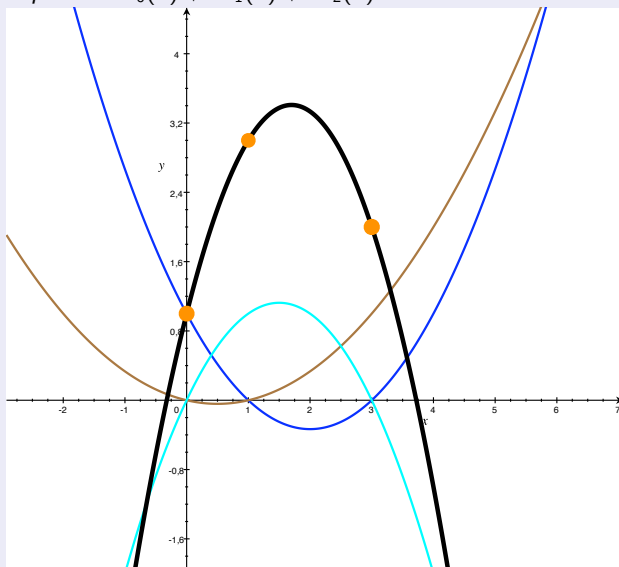
(I tre polinomi di Lagrange)



Interpolazione polinomiale

(Il polinomio interpolatore)

Il polinomio interpolatore $L_0(x) + 3L_1(x) + 2L_2(x)$



Esercizio

Si calcoli l'inversa della matrice di Vandermonde A di ordine 3 associata al vettore $X = (x_0, x_1, x_2)^T$.

Risposta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\prod_{i < j} (x_j - x_i)} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)x_1x_2 & -(x_2 - x_0)x_0x_2 & (x_1 - x_0)x_0x_1 \\ -(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) & (x_2 - x_0)(x_0 + x_2) & -(x_1 - x_0)(x_0 + x_1) \\ x_2 - x_1 & -(x_2 - x_0) & x_1 - x_0 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Si calcolino i polinomi di Lagrange L_0, L_1, L_2 relativi ai nodi x_0, x_1, x_2 .

Risposta:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \\ L_1(x) &= \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_2 - x_1)} (x^2 - (x_0 + x_2)x + x_0x_2) \\ L_2(x) &= \frac{1}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1) \end{aligned}$$

Che relazione c'è tra le due risposte?

Errore di interpolazione

Supponiamo che, per una data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, vengano “letti” $n + 1$ punti (distinti) del grafico

$$\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$$

e sia $\Pi_n(x)$ il polinomio interpolatore di grado al più n passante per questi punti. Vogliamo dare una stima dell'errore $f(x) - \Pi_n(x)$.

Teorema

Siano dati $n + 1$ nodi distinti $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$, e sia dato un altro punto $x \in [a, b]$. Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^{n+1}(I_x)$, dove $I_x = \text{conv}\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Allora esiste $\xi \in I_x$ tale che

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (3.1)$$

dove

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

è il **polinomio nodale** di grado $n + 1$.

Dimostrazione.

Se $x = x_i$ per qualche $i = 0, \dots, n$, allora il teorema è banalmente vero in quanto il primo membro è nullo (siamo in un nodo) e il secondo membro è nullo (uno dei fattori è nullo). Supponiamo dunque $x_i \neq x$ e introduciamo la funzione

$$G(z) = f(z) - \Pi_n(z) - \omega(z) \left(\frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega(x)} \right)$$

- $G \in C^{n+1}(I_x)$;
- $G(z) = 0$ quando $z \in \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (sono $n + 2$ punti!);
- per il teorema di Rolle, in I_x esistono $n + 1$ punti distinti in cui $G'(z) = 0$;
- ripetendo il ragionamento, in I_x esistono n punti distinti in cui $G''(z) = 0$;
- ...
- dopo $n + 1$ passaggi, si trova che esiste un punto $\xi \in I_x$ tale che $G^{(n+1)}(\xi) = 0$;
- tenendo conto che

$$\Pi_n^{(n+1)}(z) = 0, \quad \omega^{(n+1)}(z) = (n + 1)! \quad \forall z \in [a, b]$$

si ha

$$G^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \left(\frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega(x)} \right) (n + 1)!$$

Se ora si pone $z = \xi$ nell'ultima identità, si trova

$$0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \left(\frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega(x)} \right) (n+1)!$$

da cui si ricava

$$\left(\frac{f(x) - \Pi_n(x)}{\omega(x)} \right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

e infine la tesi

$$f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x).$$



Condizionamento

Parliamo qui del condizionamento del polinomio d'interpolazione, ovvero di come sono legati le variazioni sui dati e le variazioni sul corrispondente polinomio d'interpolazione. Supponiamo siano assegnati $n + 1$ nodi d'interpolazione $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$. In corrispondenza a questi nodi possiamo calcolare i polinomi di Lagrange $L_i(x)$, $i = 0, \dots, n$. Assegnati in corrispondenza agli $n + 1$ nodi x_i i valori y_i , $i = 0, \dots, n$, possiamo costruire il polinomio d'interpolazione $p(x) \in \mathbb{P}_n$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x).$$

Se consideriamo un'altra n -upla di dati $\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i$, $i = 0, \dots, n$, possiamo costruire il polinomio d'interpolazione $\tilde{p}(x) \in \mathbb{P}_n$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i L_i(x).$$

Osservazione

*Si osservi che i polinomi di Lagrange **dipendono soltanto dai nodi d'interpolazione.***

Condizionamento

$$\begin{aligned} |p(x) - \tilde{p}(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (y_i - \tilde{y}_i) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |y_i - \tilde{y}_i| |L_i(x)| \\ &\leq \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \end{aligned}$$

Ponendo $\varepsilon_{\max} = \max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|$ e

$$\Lambda_n := \max_{x \in [a,b]} \left(\sum_{i=0}^n |L_i(x)| \right) = \left\| \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \right\|_{\infty}, \quad (4.2)$$

detta **costante di Lebesgue**, si ottiene

$$\|p - \tilde{p}\|_{\infty} := \max_{x \in [a,b]} |p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \varepsilon_{\max} \Lambda_n.$$

Siccome $y_{\max} := \max_{0 \leq i \leq n} |y_i| \leq \|p\|_{\infty}$, abbiamo poi

$$\frac{\|p - \tilde{p}\|_{\infty}}{\|p\|_{\infty}} \leq \frac{\varepsilon_{\max}}{y_{\max}} \Lambda_n.$$

Osservazione

- $\Lambda_n \geq 1$, comunque si scelgano i nodi d'interpolazione. Infatti
 - ▶ $\sum_{i=0}^n |L_i(x)| \geq \sum_{i=0}^n L_i(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ per ogni $x \in [a, b]$.
- Λ_n *dipende soltanto dai nodi d'interpolazione x_i* . Questo implica che una scelta opportuna dei nodi può ridurre o incrementare il condizionamento.

Errore d'interpolazione. Sia data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Il **polinomio di migliore approssimazione di grado n** è quel polinomio ¹ $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$\|f - p_n^*\|_\infty \leq \|f - q_n\|_\infty \quad \forall q_n \in \mathbb{P}_n.$$

Fissati $n + 1$ nodi $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$, poniamo:

$$E_n := \|f - \Pi_n f\|_\infty$$

$$E_n^* := \|f - p_n^*\|_\infty.$$

Teorema

Sia $f \in C^0([a, b])$ e siano dati $n + 1$ nodi $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$. Allora

$$E_n^* \leq E_n \leq (1 + \Lambda_n) E_n^*$$

dove Λ_n è la costante di Lebesgue.

¹Sull'esistenza di questo polinomio torneremo in seguito.

Dimostrazione.

La prima disuguaglianza deriva dalla definizione di polinomio di migliore approssimazione. La seconda disuguaglianza deriva dall'esistenza del polinomio di migliore approssimazione p^* . Infatti, poiché deve coincidere necessariamente con il suo polinomio interpolante

$$p^*(x) = \sum_{j=1}^n p^*(x_j) L_j(x),$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) - \Pi_n f(x) &= (f(x) - p^*(x)) + (p^*(x) - \Pi_n f(x)) \\ &= (f(x) - p^*(x)) + \sum_{j=1}^n (p^*(x_j) - f(x_j)) L_j(x), \end{aligned}$$

da cui passando ai moduli

$$\begin{aligned} |f(x) - \Pi_n f(x)| &\leq |(f(x) - p^*(x))| + \sum_{j=1}^n |p^*(x_j) - f(x_j)| |L_j(x)| \\ &\leq E_n^* + \sum_{j=1}^n E_n^* |L_j(x)| = (1 + \Lambda_n) E_n^*. \end{aligned}$$



Teorema (Faber/Erdös)

Comunque si prendano $n + 1$ nodi x_i in $[a, b]$ (al crescere di n),

- esiste una funzione f tale che $\Pi_n f$ non converge a f nella norma infinito (cfr. Stoer),*
- esiste una costante $C > 0$ tale che $\Lambda_n > \frac{2}{\pi} \log(n + 1) - C, \quad n = 0, 1, \dots$*

Osservazione

Il teorema sopra ci dice che, nonostante per il teorema di Stone-Weierstrass una funzione (f definita su $[a, b]$) si possa approssimare con norma infinito con una successione di polinomi p_n , cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x) - p_n(x)\|_{\infty} = 0,$$

questo non può essere fatto in generale usando i polinomi interpolanti Π_n definiti a partire da una fissata successione di nodi di interpolazione, cioè, comunque sia data una successione di nodi di interpolazione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, esiste una funzione F che i polinomi interpolanti corrispondenti Π_n non approssimano in norma infinito, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F(x) - \Pi_n(x)\|_{\infty} \neq 0.$$

In ogni modo, nella scelta dei nodi di interpolazione, si può fare in modo da avere un condizionamento "basso", cioè una costante di Lebesgue "piccola". Da questo punto vista, come è mostrato di seguito, la scelta dei nomi equispaziati non è buona, mentre una scelta migliore (pressoché ottimale) è data dai nodi di Chebyshev.

Nodi equispaziati

Supponiamo che i nodi siano equispaziati, ovvero

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\h &= \frac{x_n - x_0}{n}.\end{aligned}$$

In tal caso si dimostra che $\Lambda_n \approx O(e^n)$.

Osservazione

Nel caso di nodi equispaziati, si ha

$$|\omega_{n+1}(x)| = \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq n! \frac{h^{n+1}}{4} \quad \forall x \in [x_0, x_n].$$

Infatti i valori maggiori si ottengono per $x_{n-1} < x < x_n$ (o simmetricamente per $x_0 < x < x_1$) e in tali casi si ha:

$$\begin{aligned}|x - x_n| |x - x_{n-1}| &\leq \frac{h}{2} \frac{h}{2}, \\|x - x_i| &\leq h(n - i), \quad i = 0, \dots, n - 2.\end{aligned}$$

Nodi equispaziati

Osservazione

Nel caso di nodi equispaziati, quando $x \in [x_0, x_n]$, vale quindi la seguente stima (ξ è un opportuno valore in $[x_0, x_n]$)

$$|f(x) - \Pi_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| |\omega_{n+1}(x)| \leq \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}.$$

Ora, $h = (x_n - x_0)/n \leq (b - a)/n$ comporta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} = 0,$$

ma questo non garantisce che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_n(x)| \right) = 0.$$

Controesempio di Runge

Esempio (Controesempio di Runge)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

insieme al suo polinomio interpolatore in $n+1$ nodi equispaziati $\Pi_n(x)$. Disegnando la funzione insieme ad i suoi polinomi interpolatori per diversi valori di n si osserva che esistono valori di $x \in [-5, 5]$ per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x) - \Pi_n(x)| \neq 0.$$

Il fenomeno è più marcato agli estremi dell'intervallo.

- il fenomeno è dovuto al fatto che i nodi sono **equispaziati**
- scegliendo i nodi in modo opportuno (e.g. i polinomi di Chebyshev) si può avere convergenza uniforme dei polinomi interpolanti la funzione f .

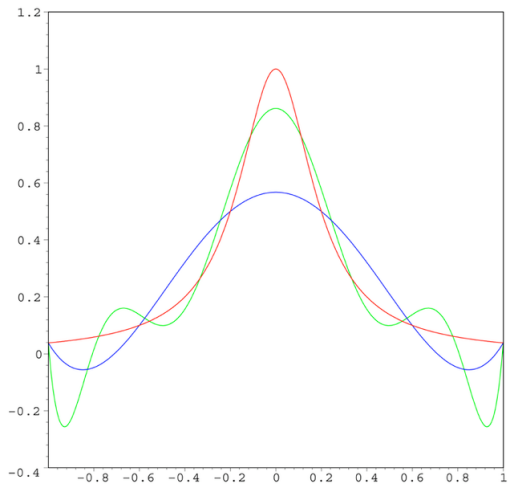
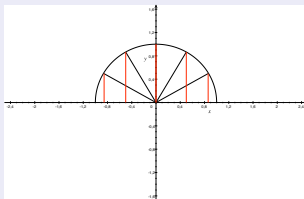


Figure: Esempio di Runge

Definizione

Nell'intervallo $[-1, 1]$ si dicono **nodi di Chebyshev** i punti $\hat{x}_i = \cos\left(i\frac{\pi}{n}\right)$, $i = 0, \dots, n$,



mentre nell'intervallo $[a, b]$ questi nodi sono dati dai punti

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(i\frac{\pi}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n.$$

Osservazione

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \log(n)$$

Se nell'esempio di Runge i polinomi interpolatori Π_n sono costruiti utilizzando i nodi di Chebyshev, allora si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi_n(x)| \right) = 0.$$