Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 23 marzo 2009

Iterazioni di punto fisso

In generale, dato il problema

$$\text{trovare } \alpha \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$$

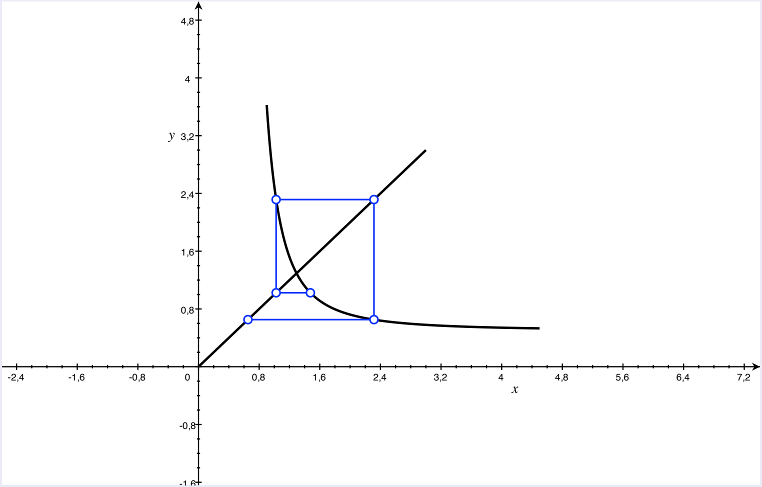
questo si può trasformare in un problema equivalente della forma

$$\text{trovare } \alpha \text{ t.c. } \alpha = \Phi(\alpha)$$

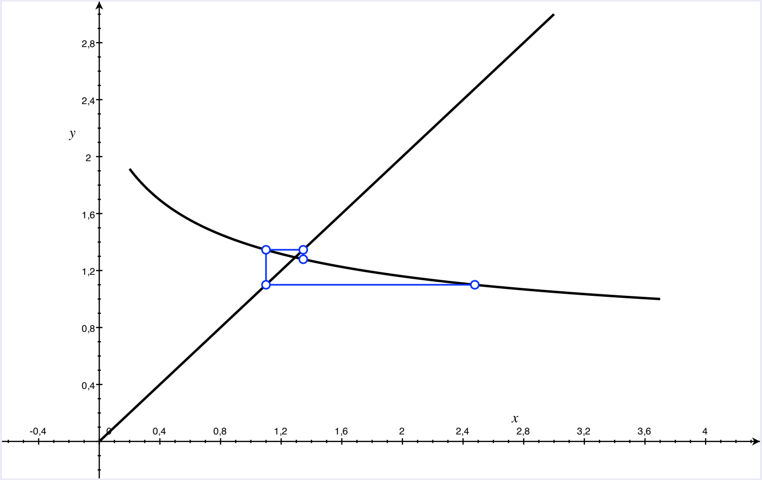
(ad esempio prendendo $\Phi(x) = x + f(x)$, ma ci sono altre scelte possibili)

Per quanto riguarda tali problemi, si utilizza il teorema delle contrazioni, o quando possibile il suo corollario.

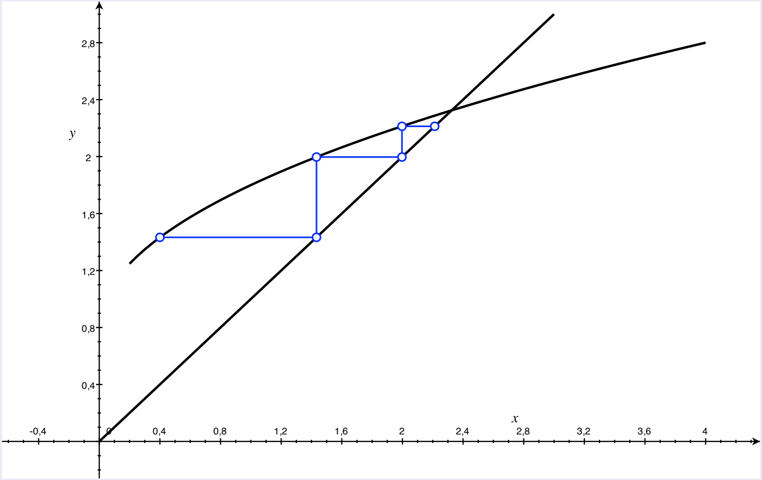
Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *nel caso in cui* $\Phi'(\alpha) < -1$. *Il procedimento non converge.*



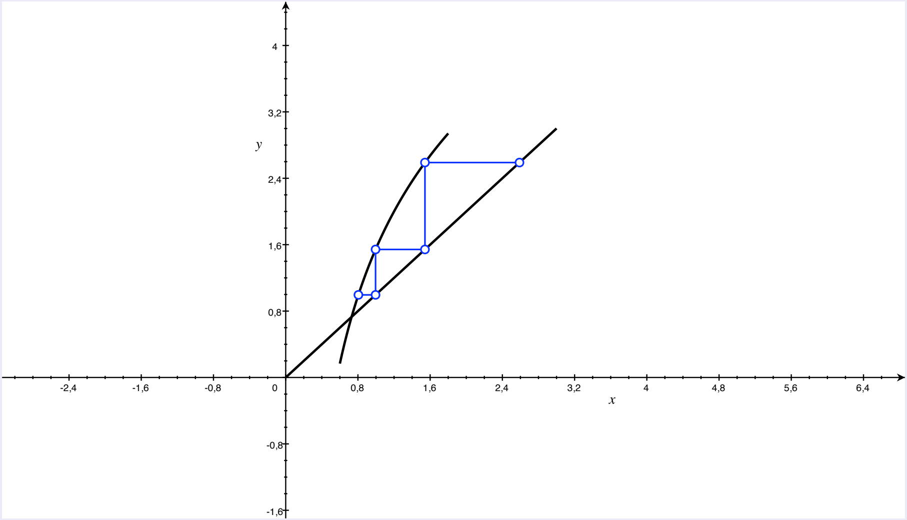
Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *nel caso in cui* $-1 < \Phi'(\alpha) < 0$. *Il procedimento* *converge*.



Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *nel caso in cui* $0 < \Phi'(\alpha) < 1$. *Il procedimento* *converge*.



Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *nel caso in cui* $1 < \Phi'(\alpha)$. *Il procedimento non converge.*



Osservazione (Ordine di convergenza metodi punto fisso)

Supponiamo che $\Phi \in C^2$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione Φ si ottiene

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \alpha &= \Phi(x_k) - \Phi(\alpha) \\ &= \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2}\Phi''(\xi)(x_k - \alpha)^2 - \Phi(\alpha) \\ &= \Phi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2}\Phi''(\xi)(x_k - \alpha)^2 \end{aligned}$$

dove ξ sta nell'intervallo di estremi α e x_k. Si ha che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha)$$

e quindi l'ordine di convergenza è almeno 1, in quanto $\Phi'(\alpha) < 1$.

Se $\Phi'(\alpha) = 0$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2}\Phi''(\alpha)$$

ovvero l'ordine di convergenza è almeno 2.

Osservazione (Ordine di convergenza metodi punto fisso)

- *Se prendiamo in esame il metodo delle corde, si ha che*

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{m}, \qquad \Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$$

Se $f'(\alpha) \neq 0$, *si ha* $\Phi'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{m} \neq 0$ *(in generale* $f'(\alpha) \neq m$*) e quindi il metodo risulta del primo ordine, in quanto* $|\Phi'(\alpha)| = \left|1 - \frac{f'(\alpha)}{m}\right| < 1$ *. Qualora* $f'(\alpha) = m$ *e* $f''(\alpha) \neq 0$, *il metodo risulta del secondo ordine*

- *Se prendiamo in esame il metodo delle tangenti, si ha che*

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Se $f'(\alpha) \neq 0$, *si ha* $\Phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$ *(infatti* $f(\alpha) = 0$*) e quindi il metodo risulta del primo ordine (almeno). Se poi* $f''(\alpha) \neq 0$, *essendo*

$$\Phi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

il metodo risulta del secondo ordine.

Il metodo di Newton come punto fisso

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso, come s'e' visto quando si è provata la convergenza di questo metodo.
S'era visto che $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$, come pure

$$\Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Quindi se $f'(\alpha) \neq 0$ allora $\Phi'(\alpha) = 0$.

Osservazione (Ordine di convergenza delle radici multiple)

Se $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ con $g(\alpha) \neq 0$, ovvero α radice di molteplicità $m > 1$, allora

$$\Phi(x) = x - \frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x) + (x-\alpha)g'(x)}$$

da cui segue che

$$0 \neq \Phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} < 1.$$

e quindi l'ordine di convergenza è 1.

Se si definisce $\Psi(x) = x - mf(x)/f'(x)$, allora $\Psi'(\alpha) = 0$ e quindi l'ordine di convergenza è almeno 2. Ma deve essere nota la molteplicità di α come radice.

Criteri d'arresto

Ciò che si desidera è una stima di $|x_i - \alpha|$.

(Il criterio di arresto $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$)

Supponiamo $\Phi \in C^1$. Allora

$$x_{i+1} - \alpha = \Phi'(\xi)(x_i - \alpha)$$

dove ξ è un numero compreso tra x_i ed α. Quindi

$$x_{i+1} - x_i = (x_{i+1} - \alpha) + (\alpha - x_i) = (x_i - \alpha)(\Phi'(\xi) - 1)$$

In questo caso

$$|x_i - \alpha| = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|\Phi'(\xi) - 1|} < \frac{\varepsilon}{|\Phi'(\xi) - 1|}$$

Va osservato che

- *l'errore sul risultato viene amplificato al tendere di $\Phi'(\xi)$ a 1*
- *quando $\Phi'(\alpha) < 0$, per i sufficientemente grande la successione risulta oscillante intorno a α. In particolare il criterio (i) in questo caso fornisce un buon criterio d'arresto.*

(Il criterio di arresto $|f(x_i)| < \varepsilon$)

Supponiamo $f \in C^1$, dove α è una radice di $f(x) = 0$. Per il teorema di Lagrange esiste η compreso tra x_i ed α tale che

$$f(x_i) = f(x_i) - f(\alpha) = f'(\eta)(x_i - \alpha)$$

da cui

$$|x_i - \alpha| = \left|\frac{f(x_i)}{f'(\eta)}\right|$$

In questo caso

$$|x_i - \alpha| = \left|\frac{f(x_i)}{f'(\eta)}\right| < \frac{\varepsilon}{|f'(\eta)|}$$

Va osservato che l'errore aumenta al diminuire di $f'(\eta)$: questo spiega perchè se α è radice doppia per $f(x) = 0$ allora la convergenza è più lenta.

Efficienza di un metodo iterativo

In modo pratico, si usa legare l'efficienza di un metodo iterativo al numero di iterazioni necessarie per ridurre l'errore iniziale di una quantità prefissata.
Il numero d'iterazioni dipende dall'ordine di convergenza del metodo.

Esempio

Posto $e_i = x_i - \alpha$, *se* $p = 1$ *si ottiene* ($\beta \in (0,1)$)

$$|e_i| \leq \beta |e_{i-1}| \leq \ldots \leq \beta^i |e_0|$$

mentre se $p > 1$ *si ottiene*

$$|e_i| \leq \beta |e_{i-1}|^p \leq \ldots \leq \beta \beta^p \beta^{p^2} \ldots \beta^{p^i} |e_0|^{p^i}$$

ovvero

$$|e_i| \leq \frac{1}{\beta^{1/(p-1)}} \left(\beta^{p/(p-1)} |e_0| \right)^{p^i}.$$

Esempio (...continua...)

Quindi,

- *quando $p = 1$, per avere*

$$\frac{|e_i|}{|e_0|} < \varepsilon \text{ si richiede che } \beta^i < \varepsilon$$

e dunque (ricordando che $\beta < 1$ e dunque $\log \beta < 0$) sono sufficienti

$$i \log \beta \leq \log \varepsilon \Longrightarrow i \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \beta}$$

iterazioni

Esempio (...continua...)

se $p > 1$ *e supponiamo* $\beta^{p/(p-1)}|e_0| < 1$ *(si tratta di scegliere il punto di partenza "abbastanza vicino" alla radice!), per avere*

$$\frac{|e_i|}{|e_0|} < \varepsilon$$

è sufficiente che sia

$$\frac{1}{\beta^{1/(p-1)}} \beta^{\frac{p^{i+1}}{p-1}} |e_0|^{p^i - 1} < \varepsilon$$

e quindi

$$\frac{p^{i+1} - 1}{p - 1} \log \beta + (p^i - 1) \log |e_0| < \log \varepsilon$$

ovvero

$$p^i > \frac{\log \left(\varepsilon \beta^{p/(p-1)} |e_0| \right)}{\log \left(\beta^{1/(p-1)} |e_0| \right)}$$

e quindi sono necessarie

$$i \geq \log_p \left(\frac{\log \left(\varepsilon \beta^{p/(p-1)} |e_0| \right)}{\log \left(\beta^{1/(p-1)} |e_0| \right)} \right)$$

iterazioni

Esempio (...continua...)

Se per esempio $p = 2$ *e* $\beta|e_0| = \frac{1}{2}$ *e* $\varepsilon = 2^{-31}$, *si trova che sono necessarie* 5 *iterazioni per ridurre l'errore iniziale di* $\varepsilon = 2^{-31}$.
Se invece il metodo è del primo ordine e $\beta = \frac{1}{2}$, *allora per ottenere lo stesso risultato devo iterare* 31 *volte.*

Metodo di Aitken

Problema

Data una succsessione originata da $x_{i+1} = g(x_i)$ *convergente ad* α *con ordine di convergenza* 1, *è possibile costruire una nuova successione* `accelerata` z_i, *convergente ad* α *con ordine* $p > 1$*?*

Soluzione

Sia $x_i = \alpha + \gamma^i$ *con* $\gamma \in (0, 1)$ *una successione (una progressione geometrica) convergente a* α. *Allora*

$$\begin{aligned} x_{i+1} - \alpha &= \gamma(x_i - \alpha) \\ x_{i+2} - \alpha &= \gamma(x_{i+1} - \alpha) \end{aligned}$$

da cui si ottiene sottraendo membro a membro

$$\gamma = \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

e sostituendo nella prima uguaglianza si ottiene

$$\alpha = \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = x_i - \frac{x_{i+1}^2 + x_i^2 - 2x_i x_{i+1}}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

Soluzione (...continua...)

La formula

$$\alpha = \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

genera il procedimento: data una successione $x_i \to \alpha$, anche se non in progressione geometrica, si può introdurre una nuova successione

$$z_{i+1} = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

In particolare, se $x_{i+1} = g(x_i)$ allora

$$z_{i+1} = G(z_i), \qquad \text{dove } G(z) = z - \frac{(g(z) - z)^2}{g(g(z)) - 2g(z) + z}$$

Teorema

Se $g \in C^1([a,b])$, $g(\alpha) = \alpha$ *e* $g'(\alpha) \neq 0$, *allora*

$$G(z) = \begin{cases} z - \dfrac{(g(z)-z)^2}{g(g(z)) - 2g(z) + z} & \text{se } z \neq \alpha \\ \alpha & \text{se } z = \alpha \end{cases}$$

è continua.

La dimostrazione segue dal teorema dell'Hospital, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\alpha} (z - G(z)) &= \lim_{z\to\alpha} \frac{(g(z)-z)^2}{g(g(z)) - 2g(z) + z} \\ &= \lim_{z\to\alpha} \frac{2(g(z)-z)(g'(z)-1)}{g'(g(z))g'(z) - 2g'(z) + 1} \\ &= \frac{2(g(\alpha)-\alpha)(g'(\alpha)-1)}{g'(g(\alpha))g'(\alpha) - 2g'(\alpha) + 1} \\ &= \frac{2(\alpha-\alpha)(g'(\alpha)-1)}{(g'(\alpha)-1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema

Sia $g \in C^2([a,b])$ *tale che* $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) \neq 0$ *e* $g'(\alpha) \neq 1$.
Allora esiste un intorno U *di* α *tale che comunque si prenda* $z_0 \in U$ *la successione* $z_{i+1} = G(z_i)$ *è convergente a* α *con ordine di convergenza almeno* 2.

Esempio

Studiare la convergenza della successione $z_{i+1} = G(z_i)$ *quando*

- $g_1(x) = \frac{2-x^3}{4\cos x}$
- $g_2(x) = \frac{2-4x\cos x}{x^2}$.

Si osserva che $g_1(x) = x$ *e* $g_2(x) = x$ *hanno entrambe come punto fisso la soluzione* $\alpha \in [0,1]$ *dell'equazione*

$$x^3 + 4x\cos x - 2 = 0.$$

Se si considera $x_{i+1} = g_1(x_i)$, *si trova*

$$g_1'(x) = \frac{(2-x^3)\sin x - 3x^2\cos x}{4\cos^2 x}$$

e $|g_1'(x)| \leq |g_1'(1)| < 0,7$ *in* $[0,1]$, *dunque la successione* $x_i \to \alpha$. *Essendo* $g_1'(x) > 0$, *la successione è monotona e partendo da* $x_0 = 0$ *approssima* α *con* 5 *cifre significative in* 6 *passi.*

Esempio (...continua...)

Se si introduce $z_{i+1} = G_1(z_i)$, *si trova che, partendo da* $z_0 = 0$, $z_i \longrightarrow \alpha$ *e l'approssimazione con* 5 *cifre significative si ottiene in* 3 *passi.*

Se si considera $x_{i+1} = g_2(x_i)$, *si trova*

$$g_2'(x) = \frac{4}{x^3}(x \cos x + x^2 \sin x - 1)$$

e $|g_2'(x)| > 1$ *in* $(0, 0, 7])$, *intervallo che contiene la radice: questo significa che la successione* x_i *non tende a* α.
Se si introduce $z_{i+1} = G_2(z_i)$, *si trova che, partendo da* $z_0 \in [0, 51, 0, 6]$, $z_i \longrightarrow \alpha$. *Per esempio, prendendo* $z_0 = 0, 6$, *si approssima* α *con* 5 *cifre significative in* 25 *passi.*

Esempio

Sia $g(x) = \frac{2}{x}$. *Il numero* $\sqrt{2}$ *è punto fisso di* $x = g(x)$, *ma la successione* $x_{i+1} = g(x_i)$ *non converge a* $\sqrt{2}$. *Applicare il metodo di Aitken.*

$$G(z) = z - \frac{(g(z) - z)^2}{g(g(z)) - 2g(z) + z}$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} G(z) &= z - \frac{\left(\frac{2}{z} - z\right)^2}{g\left(\frac{2}{z}\right) - 2\frac{2}{z} + z} = z - \frac{\left(\frac{2}{z} - z\right)^2}{z - \frac{4}{z} + z} \\ &= z + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2}{z} - z\right)^2}{\left(\frac{2}{z} - z\right)} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{2}{z}\right) \end{aligned}$$

Abbiamo ritrovato l'algoritmo di Erone, che converge con ordine 2 *al punto fisso* $\sqrt{2}$.

Esercizio

Sia data la funzione $f(x) = e^x - 2x^2$. *Provare che*

- *L'equazione* $f(x) = 0$ *ha 3 soluzioni* $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3$;
- *tracciare un grafico approssimativo di* f;
- *determinare tre intervalli* $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, 3$ *in cui cada una ed una sola radice;*
- *determinare numericamente il valore* $\xi \in]\alpha_1, \alpha_2[$ *tale che se* $x_0 < \xi$, *allora il metodo di Newton applicato a* $f(x)$ *converge a* α_1.