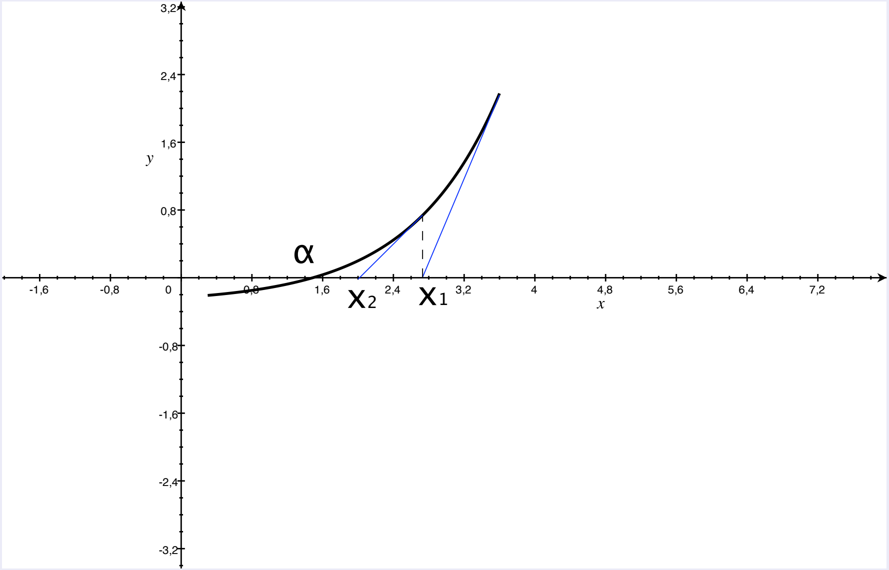
Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Giovedì 19 marzo 2009

(Il metodo delle tangenti (di Newton))



Il metodo delle tangenti (di Newton) Supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia derivabile in $x_0 \in [a, b]$ con $f'(x_0) \neq 0$. La retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e questa interseca l'asse x nel punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Supponendo che $x_1 \in [a, b]$ e f sia derivabile in x_1 con $f'(x_1) \neq 0$, in modo analogo posso costruire

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

e vengo così a costruire una successione di punti.

Problema

- *$x_k \in [a, b]$ per ogni $k > 0$?*
- *La successione $\{x_k\}$ converge?*
- *E se converge, a cosa converge?*

Teorema

Sia $f \in C^2([a, b])$*. Se esiste* $\alpha \in]a, b[$ *tale che* $f(\alpha) = 0$ *e* $f'(\alpha) \neq 0$*, allora*

esiste $\delta > 0$ *tale che la successione definita da*

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 = q \end{cases}$$

al variare di $q \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ *è convergente e*

$$x_k \to \alpha \qquad k \to \infty.$$

Posto $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, si ha (ricorda che $f(\alpha) = 0$)

$$\Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}, \quad e \quad \Phi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0.$$

La continuità di Φ' in $]a, b[$ implica che esiste tutto un intorno $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ in cui $|\Phi'(x)| \le k < 1$, ovvero che

$$\|\Phi'\|_\infty = \sup_{x \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[} |\Phi'(x)| \le k < 1$$

ovvero Φ è una contrazione.

Inoltre, essendo $\Phi(\alpha) = \alpha$, si ha che $\Phi(]\alpha - \delta, \alpha + \delta[) \subset]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ e quindi

$$\Phi :]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\to]\alpha - \delta, \alpha + \delta[.$$

Dunque Φ è una contrazione da $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ in sé.

Il teorema delle contrazioni assicura che esiste uno ed un solo punto fisso per la successione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, e questo è α.

Sempre per il teorema delle contrazioni, comunque si fissi $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, la successione

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \to \alpha \quad k \to \infty$$

Teorema (Monotonia)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2, *con* $\alpha \in]a,b[$ *t.c.* $f(\alpha) = 0$. *Se esiste un intorno* $[\alpha, \alpha+\rho[\subset [a,b]$ *tale che*

- $f(x)f''(x) > 0$ *per ogni* $x \in]\alpha, \alpha+\rho[$
- $f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in]\alpha, \alpha+\rho[$

allora, per ogni $x_0 \in]\alpha, \alpha+\rho[$ *la successione ottenuta col metodo delle tangenti è monotona decrescente e converge a* α

Infatti dalle ipotesi segue che $f/f' > 0$ nell'intervallo, da cui segue la decrescenza. Per induzione si prova che $\alpha < x_i$.
Analogamente

Teorema (Monotonia)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2, *con* $\alpha \in]a,b[$ *t.c.* $f(\alpha) = 0$. *Se esiste un intorno* $]\alpha-\rho, \alpha] \subset [a,b]$ *tale che*

- $f(x)f''(x) > 0$ *per ogni* $x \in]\alpha-\rho, \alpha[$
- $f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in]\alpha-\rho, \alpha[$

allora, per ogni $x_0 \in]\alpha-\rho, \alpha[$ *la successione ottenuta col metodo delle tangenti è monotona crescente e converge a* α

Teorema

Il metodo delle tangenti, quando α *è una radice di molteplicità* 1, $f \in C^2$, $f'(\alpha) \neq 0$ *e* $f''(\alpha) \neq 0$, *ha ordine (di convergenza)* 2.

La formula di Taylor ci dà

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha - x_k) + \frac{f''(z(x_k))}{2}(\alpha - x_k)^2$$

dove $z(x_k)$ cade nell'intervallo di estremi α e x_k. Ne segue

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\alpha - x_k) = -\frac{f''(z(x_k))}{2f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2$$

Essendo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, sostituendo si ha

$$\alpha - x_{k+1} = -\frac{f''(z(x_k))}{2f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2$$

da cui si ottiene, qualora $f'(x_k) \neq 0$, (si osservi che $z_k \to \alpha$ quando $k \to \infty$)

$$\frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|^2} = \left| \frac{f''(z(x_k))}{2f'(x_k)} \right| \to \left| \frac{f''(\alpha))}{2f'(\alpha)} \right| \quad k \to \infty$$

Osservazione

Se $f'(\alpha) = 0$, il metodo delle tangenti è ancora convergente ma di ordine 1.

Esempio

Si prenda $f(x) = x^2$. Se si considera la radice $\alpha = 0$ (che è doppia), si ha – essendo $f'(x) = 2x$ – che

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{x_k}{2}$$

e quindi

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{|x_k - \alpha|} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \quad k \to \infty.$$

Dunque abbiamo convergenza, ma di ordine 1.

Osservazione

Se la radice α di $f(\alpha) = 0$ ha molteplicità $m > 1$, in tal caso l'ordine di convergenza passa da 2 a 1.
Risulta possibile recuperare l'ordine 2 modificando la successione: si introduce la seguente successione

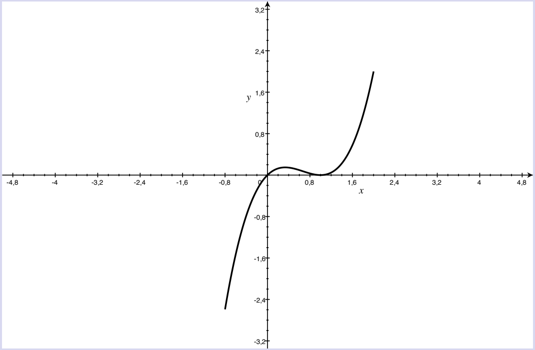
$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Questo presuppone di conoscere la molteplicità m a priori.

Esempio

Si prenda $f(x) = x(x^2 - 2x + 1)$.

- f *è un polinomio di* 3 *grado*
- $x_1 = 0$ *è radice semplice,* $x_2 = 1$ *è radice doppia* ($f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ *e* $f'(1) = 0!$)



Esempio (...continua...)

Consideriamo $(m = 2)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - 2\frac{x_k^3 - 2x_k^2 + x_k}{3x_k^2 - 4x_k + 1} \\ &= \frac{x_k^2 + x_k}{3x_k - 1}. \end{aligned}$$

Ovviamente $\ell = 1$ *è soluzione di* $\ell = \frac{\ell^2 + l}{3\ell - 1}$. *Inoltre*

$$|x_{k+1} - 1| = \left| \frac{x_k^2 + x_k}{3x_k - 1} - 1 \right| = \frac{(x_k - 1)^2}{|3x_k - 1|}$$

da cui segue

$$\frac{|x_{k+1} - 1|}{|x_k - 1|^2} = \frac{1}{|3x_k - 1|} \rightarrow \frac{1}{2}$$

ovvero abbiamo recuperato la convergenza di ordine 2.

Algoritmo di Erone

Esempio

Quando si prenda $f(x) = x^2 - \alpha$, *ovvero un polinomio avente come radici* $\pm\sqrt{\alpha}$, *il metodo delle tangenti produce*

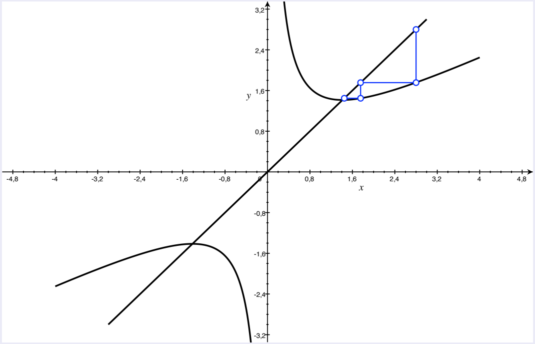
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^2 - \alpha}{2x_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{\alpha}{x_k}\right). \end{aligned}$$

cioè l'algoritmo di Erone. In particolare si ritrova che

- *se* $x_0 > \sqrt{\alpha}$, *allora* $x_k \to \sqrt{\alpha}$ *decrescendo (per il teorema sulla monotonia del metodo delle tangenti)*
- *se* $x_0 < -\sqrt{\alpha}$, *allora* $x_k \to -\sqrt{\alpha}$ *crescendo (per il teorema sulla monotonia del metodo delle tangenti).*

Può aiutare fare il disegno delle curve $y = x$ *e* $y = g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$.
Osserviamo che questi risultati di monotonia sono ora conseguenza di teoremi generali.
Si ritrova che l'ordine di convergenza del metodo è 2.

L'algoritmo di Erone nel caso $\alpha = 2$. Si noti che la successione dei punti x_k, quando $x_0 > \sqrt{\alpha}$ ($x_0 > \sqrt{\alpha}$) è monotona.



Esempio

Determinare la radice reale α *dell'equazione*

$$f(x) = x^3 + 4x\cos x - 2 = 0$$

con 5 *cifre significative utilizzando il metodo delle tangenti.*
Abbiamo già studiato il grafico di questa funzione e abbiamo trovato che ha una sola radice $\alpha \in]0,1[$. *Si ha che*

$$f'(x) = 3x^2 + 4\cos x - 4x\sin x$$

e quindi $|f'(x)| \leq f'(0) = 4$ *per ogni* $x \in [0,1]$. *Dunque*

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 - 4x^2\sin x + 2}{3x^2 + 4\cos x - 4\sin x}$$

Ora α *è radice di molteplicità* 1 *dell'equazione* $f(x) = 0$, *e inoltre* $f''(\alpha) \neq 0$: *questo implica che il metodo è del* 2 *ordine. Inoltre quando* $x < \alpha$, $0 \leq \Phi'(x) < 1$, *e dunque se si parte da* $x_0 = 0$ *la successione* $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ *risulta monotona crescente. Si ottiene*

i	x_i
1	0,5
2	0,5362971
3	0,5368383
4	0,5368383

Quando arrestare il procedimento?

L'ideale sarebbe fissare ε – la tolleranza – e arrestare k non appena

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon.$$

Ma questo non è possibile poichè α va – in generale – determinato!

Usualmente si arresta il processo quando

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon,$$

e vedremo che questa scelta permette una buona stima dell'errore commesso nell'approssimazione di α.

Iterazioni di punto fisso

In generale, dato il problema

$$\text{trovare } \alpha \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$$

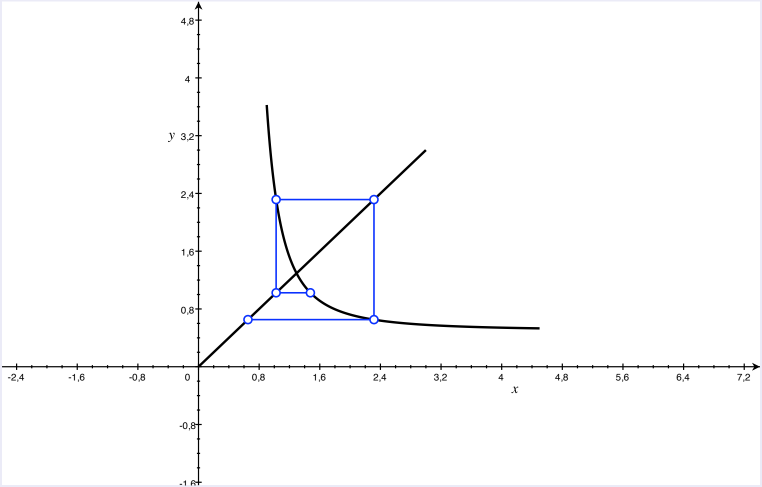
questo si può trasformare in un problema equivalente della forma

$$\text{trovare } \alpha \text{ t.c. } \alpha = \Phi(\alpha)$$

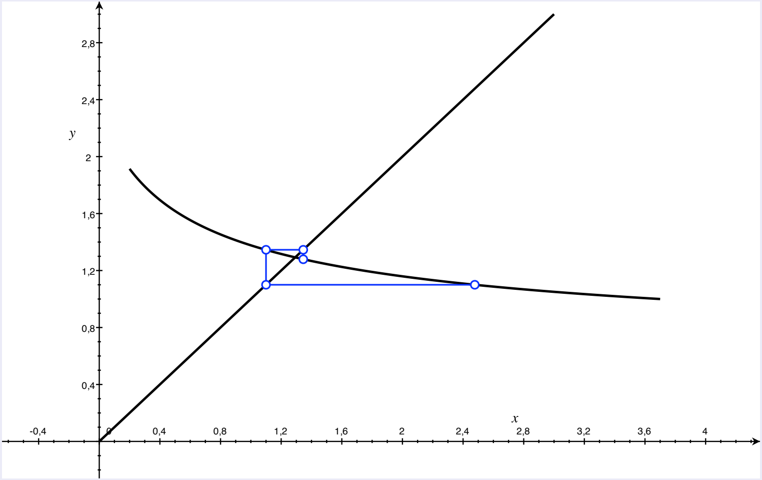
(ad esempio prendendo $\Phi(x) = x + f(x)$, ma ci sono altre scelte possibili)

Per quanto riguarda tali problemi, si utilizza il teorema delle contrazioni, o quando possibile il suo corollario.

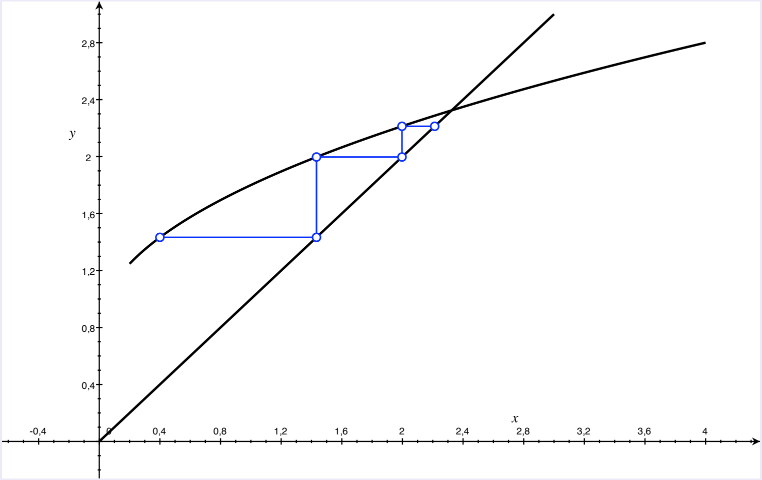
Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ nel caso in cui $\Phi'(\alpha) < -1$. Il procedimento non converge.



Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ nel caso in cui $-1 < \Phi'(\alpha) < 0$. Il procedimento converge.



Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *nel caso in cui* $0 < \Phi'(\alpha) < 1$. *Il procedimento* *converge.*



Iterazione $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ nel caso in cui $1 < \Phi'(\alpha)$. Il procedimento non converge.