Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 16 marzo 2009

Equazioni non lineari

Problema

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, determinare le soluzioni di* $f(x) = 0$.

Soluzione

I metodi numerici per la risoluzione di questo problema sono iterativi. Noi presenteremo i seguenti

- *Metodo di bisezione*
- *Metodo delle corde*
- *Metodo delle tangenti, o di Newton*

Esistenza degli zeri

Iniziamo con il richiamare un teorema fondamentale.

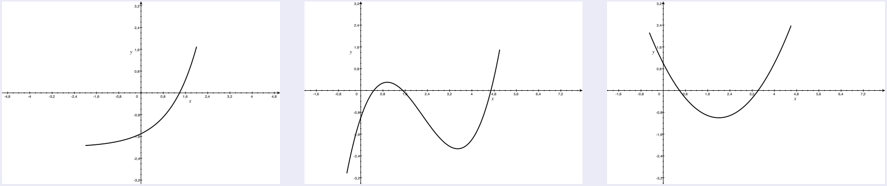
Teorema

Sia data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(a)f(b) < 0$*. Allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$*.*

Osservazione

Alcune precisazioni sono d'obbligo.

- *nell'ipotesi* $f(a)f(b) < 0$*, la soluzione esiste ma può non essere unica;*
- *è possibile che la soluzione esista anche se* $f(a)f(b) > 0$ *(ovvero il teorema fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza).*



Il metodo di bisezione

Una dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri è data dal metodo di bisezione:
A partire da $I_0 = [a, b]$ si costruisce una successione di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ in modo che

- $f(a_k)f(b_k) < 0$;
- $I_{k+1} \subset I_k$;
- $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$.

Algoritmo

Si pone a_0 e b_0.
Per $k \geq 0$ si pone $x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$

- *Se $f(x_{k+1}) = 0$ allora STOP.*
- *Se $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ allora $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k+1}$.*
- *Se $f(a_k)f(x_{k+1}) > 0$ allora $a_{k+1} = x_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.*

Ad ogni iterazione si ha

$$|\alpha - x_{k+1}| < \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b-a}{2^{k+1}} \to 0$$

Quando fermarsi?

Problema

La successione generata dal metodo dicotomico aprossima la soluzione di $f(x) = 0$, senza – in generale – raggiungerla mai. Si presentano diversi problemi

- *quando arrestare il procedimento?*
- *quanti passi sono necessari per guadagnare una cifra significativa?*

I criteri di arresto sono principalmente due. Fissata una tolleranza $\varepsilon > 0$, richiedere

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

oppure

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

Soluzione (criterio $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$)

Questo è un buon criterio perchè, nel caso del metodo dicotomico,

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{|b-a|}{2^k}$$

e quindi, per avere $|\alpha - x_k| < \varepsilon$, *è sufficiente che*

$$\frac{|b-a|}{2^k} < \varepsilon$$

ovvero

$$\frac{|b-a|}{\varepsilon} \leq 2^k$$

e infine

$$\frac{\log_e (|b-a|/\varepsilon)}{\log_e(2)} \leq k.$$

Soluzione

Per guadagnare una cifra significativa è necessario ottenere

$$b_k - a_k < \frac{1}{10}(b-a) \quad \textit{ovvero} \quad \frac{1}{2^k}(b-a) < \frac{1}{10}(b-a)$$

e quindi

$$10 < 2^k \Rightarrow k > \log_2(10) \approx 3,32.$$

Soluzione (criterio $f(x_k) < \varepsilon$)

Se si prende come criterio $|f(x_k)| < \varepsilon$*, va osservato che –se per esempio* $f'(\alpha) >> 1$ *– possono essere necessarie molte iterazioni prima che il processo si arresti essendo*

$$|f(x_k)| = |f(x_k) - f(\alpha)| = |f'(\xi)||x_k - \alpha|$$

ovvero

$$|x_k - \alpha| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi)|} < \frac{\varepsilon}{|f'(\xi)|} << \varepsilon$$

Osservazione

Osserviamo che questo procedimento, che richiede poche ipotesi, converge molto lentamente. Per avere 3 cifre decimali significative sono necessarie almeno 10 iterazioni.

Definizione (Ordine di convergenza)

Data una successione $x_i \to \alpha$ *per* $i \to \infty$, *questa si dice avere* `ordine di convergenza` $p \geq 1$ *se*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} = \gamma, \quad \begin{cases} \gamma \in (0,1] & \text{se } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

γ *è detto* `fattore di convergenza`.

Osservazione

La successione generata dal metodo di bisezione ha ordine di convergenza 1, *ed il fattore di convergenza è* $\gamma = 1/2$.

La formula di Taylor con resto di Lagrange

Definizione

Data una funzione $f \in C^n(]a,b[)$ *ed un punto* $x_0 \in]a,b[$, *diciamo* `Polinomio di Taylor` P_n `centrato in` x_0 *il polinomio così definito*

$$P_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Teorema

Sia $f \in C^{n+1}(]a,b[)$, *e si fissi un qualsiasi* $x_0 \in]a,b[$. *Allora comunque si prenda* $x \in]a,b[$ *esiste* $z(x)$ *compreso tra* x_0 *e* x *tale che*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Teorema ($n = 0$ Teorema di Lagrange)

Sia $f \in C^1(]a,b[)$*. Allora esiste* $z \in]a,b[$ *tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b-a)$$

Osservazione

Il termine $\frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $(x-x_0)^n$*, ovvero* $\frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o(|x-x_0|^n)$*.*

Si ritrova la formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) - P_n(x) = o(|x-x_0|^n), \quad x \to x_0.$$

Osservazione (Corollario del Teorema delle Contrazioni)

Se

- $\Phi : [a, b] \to [a, b]$,
- $\Phi \in C^1$,
- $\|\Phi'\|_\infty = \sup_{[a,b]} |\Phi'(x)| = K < 1$

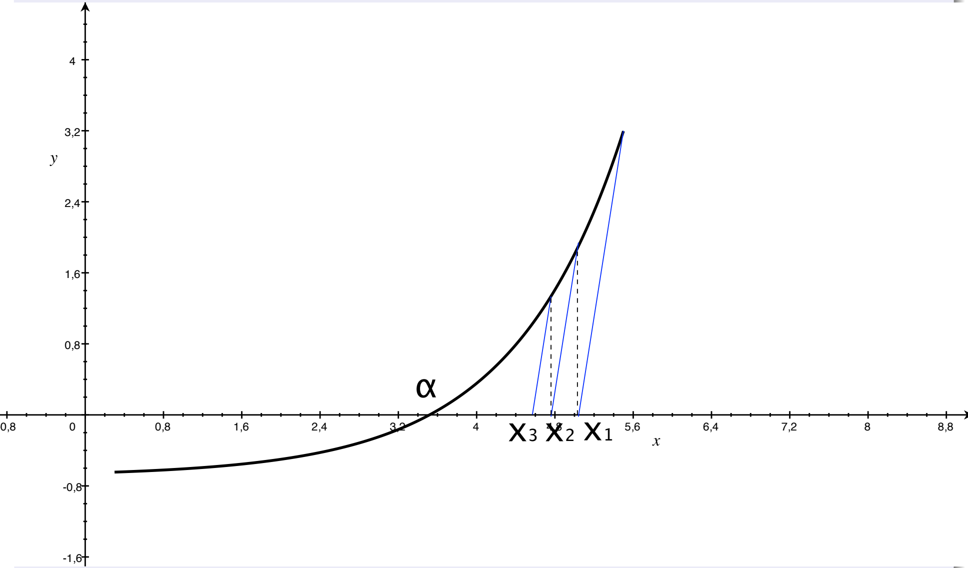
allora esiste uno ed un solo $\alpha \in [a, b]$ *t.c.* $\Phi(\alpha) = \alpha$ *e per ogni scelta di* x_0 *la successione*

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi(x_k) \\ x_0 \end{cases}$$

converge a α.

Il metodo delle corde

(Il metodo delle corde)



Il metodo delle corde

Il problema è determinare la soluzione di $f(x) = 0$.
Supponiamo di aver individuato un intervallo $[a, b]$ ove $f(a)f(b) < 0$ –"Localizzazione" – (ad esempio utilizzando il metodo dicotomico).
A questo punto introduciamo la seguente iterazione

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{m} \\ x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

dove $m \in \mathbb{R}$. Posto $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$, si ha che $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$ come pure

$$\|g'\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)| = K.$$

Dal corollario precedente segue che

Teorema

Sia data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1 *tale che* $f(\alpha) = 0$ *con* $\alpha \in (a, b)$, $f'(\alpha) \neq 0$. *Se* $|g'(\alpha)| = \left|1 - \frac{f'(\alpha)}{m}\right| < 1$, *allora esiste un intorno* $]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ *tale che, comunque si prenda* $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, $x_i \to \alpha$.

Osservazione

La dimostrazione segue dal fatto che, essendo $|g'(\alpha)| < 1$, *esiste un intorno* $I =]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ *tale che*

- $\sup\limits_{x \in]\alpha-\rho,\alpha+\rho[} |g'(x)| < 1$
- $g :]\alpha - \rho, \alpha + \rho[\rightarrow]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$.

Per il corollario del teorema delle contrazioni visto prima, g *risulta essere una contrazione da* $]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ *in sè, e quindi* $x_i \rightarrow \alpha$ *quando* $i \rightarrow \infty$ *comunque si scelga* $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$.

Osservazione

Naturalmente questo metodo è molto approssimativo, nel senso che esiste grande libertà nella scelta di m. *Condizioni sufficienti possono essere*

- $mf'(x) > 0$ *nell'intervallo* $I =]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$
- $|m| > \frac{1}{2} \max\limits_{x \in I} |f'(x)|$.

Esercizio

- *Se* $m \neq f'(\alpha)$, *allora il metodo delle corde è del primo ordine.*
- *Se* $f \in C^2$ *e* $m = f'(\alpha)$, *allora il metodo delle corde è almeno del secondo ordine.*

Osservazione

In generale non sappiamo valutare se $f'(\alpha) \neq 0$ *o se* $|g'(\alpha)| < 1$*, dunque quello che si fa è chiedere. ad esempio,*

- $f'(x) \neq 0$ *nell'intervallo* $[a, b]$*;*
- $mf'(x) > 0$ *e* $|m| > \frac{1}{2} \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

che sono sufficenti per implementare il metodo

Esempio

Determinare la radice reale α *dell'equazione*

$$f(x) = x^3 + 4x\cos x - 2 = 0$$

con 5 *cifre significative.*
Brevemente

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, *e dunque esiste almeno una radice reale.*
- *La derivata prima* $f'(x) = 3x^2 + 4\cos x - 4x\sin x > 0$ *per ogni* x, *e dunque la radice è isolata.*
- $f(0) < 0 < f(1)$, *e dunque* $\alpha \in (0,1)$. *Infatti* $1 < \frac{\pi}{3}$, *e quindi*

$$\begin{aligned} f(0) = -2 < 0 &< -1 + 2 \\ &= -1 + 4\cos(\pi/3) \\ &\leq 1 + 4\cos 1 - 2 = f(1) \end{aligned}$$

Esempio (...continua...)

Si ha $|f'(x)| \leq f'(0) = 4$ *per ogni* $x \in [0,1]$.
Fissato $m > 2$, *il metodo delle corde converge.Converge pure quando* $m = 2$, *anche se molto lentamente. Si fissa come punto iniziale* $x_0 = 0$.

m	*n.iteraz.*
2	25
3	5
4	7
5	11
6	15

Il risultato ottimale (poche iterazioni) in corrispondenza a $m = 3$ *è dovuto al fatto che* $f'(\alpha) \approx 3,2$.

i	$m = 3$	$m = 4$
1	$0,6666666$	$0,5$
2	$0,5360014$	$0,5299587$
3	$0,5368957$	$0,5354853$
4	$0,5368347$	$0,5365698$
5	$0,5368388$	$0,5367854$
6		$0,5368283$
7		$0,5368369$

Osservazione

Quando $m = 2$ *ed* $m = 3$ *si ha che* $g'(x) < 0$, *e quindi le successioni oscillano intorno ad* α.
Quando $m \geq 4$, *allora* $g'(x) > 0$ *e quindi le successioni sono monotone.*