

Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Lunedì 09 marzo 2009

Norme naturali (indotte o subordinate)

Se si considera la matrice $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ come applicazione lineare, allora una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$ induce sullo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{n \times n}$ una norma matriciale.

Definizione

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|_*$ sullo spazio $\mathbb{R}^n$, diciamo norma matriciale indotta sullo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{n \times n}$ la seguente applicazione da $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$A \rightarrow \|A\|_* := \max_{\|x\|_*=1} \|Ax\|_*$$

Definizione

Data una matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o anche $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dice **raggio spettrale** di M il massimo dei moduli degli autovalori di B . Esso si indica in genere con $\rho(B)$.

Si noti che il raggio spettrale è sempre un numero reale (non negativo).

Esempi di norme indotte

Esempio

La norma vettoriale $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ induce la seguente norma matriciale

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Esempio

La norma vettoriale $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ induce la seguente norma matriciale

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$$

dove $\rho(A^T \cdot A)$ è il massimo degli autovalori di $A^T \cdot A$ (si osservi che la matrice $A^T \cdot A$ è simmetrica, quindi ha tutti gli autovalori reali; essi sono anche non negativi).

Esercizio

La norma vettoriale $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ induce la seguente norma matriciale

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Corollario

Per ogni matrice A abbiamo:

- $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$
- $\|A^T\|_2 = \|A\|_2$

Corollario

Per ogni matrice A abbiamo:

- $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$
- $\|A^T\|_2 = \|A\|_2$

Vediamo la $\|\cdot\|_1$. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|x\|_1 = 1$. Allora

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n (|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}|) \\ &\leq \left[\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= \left[\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right]\end{aligned}$$

e quindi

$$\|A\|_1 := \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Ora bisogna verificare che esiste un vettore per cui c'è uguaglianza. Sia k l'indice tale che

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Preso $x = e_k$, il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ (quello con tutti le componenti nulle tranne che la k -esima in cui vale 1), si ha

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

e quindi abbiamo provato che vale l'uguaglianza.

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius *non è una norma indotta* (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius *non è una norma indotta* (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius *non è una norma indotta* (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius *non è una norma indotta* (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius *non è una norma indotta* (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

Teorema

Per ogni norma matriciale

- $\|I\| \geq 1$, dove I è la matrice identità.
- $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ per ogni matrice A invertibile.

Teorema

Per ogni norma matriciale indotta

- (i) $\|I\| = 1$
- (ii) Se $\|A\| < 1$, allora $A + I$ è nonsingolare e si ha

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

- (iii) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e per ogni norma matriciale (indotta) $\|\cdot\|$, dove $\rho(A)$ è il massimo dei moduli degli autovalori di A .

Osservazione

La norma di Frobenius **non è una norma indotta** (infatti $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$).

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

La (i) segue dalla definizione.

Proviamo la (iii). Sia λ un autovalore di A e sia $v \neq 0$ un autovettore corrispondente di norma uno (un autovettore è sempre definito a meno di una costante moltiplicativa $\neq 0$), ovvero

$$Av = \lambda v, \quad \text{con } \|v\| = 1.$$

Allora

$$\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$$

da cui segue che

$$|\lambda| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Proviamo la (ii). Essendo $\|A\| < 1$, per la (iii) risulta $\rho(A) < 1$, e quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è nonsingolare. Dalla relazione

$$(I + A) \cdot (I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A \cdot (I + A)^{-1}$$

da cui, passando alle norme,

$$\|(I + A)^{-1}\| = \|I - A \cdot (I + A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|A\| \|(I + A)^{-1}\|$$

e infine, essendo $\|I\| = 1$ per la (i), si ha che

$$(1 - \|A\|) \|(I + A)^{-1}\| \leq 1.$$

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Notazione

- $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I\}$, *gruppo ortogonale*
- $S(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\}$, *spazio delle matrici simmetriche*

Osservazione

- 1 Se $U \in O(n)$, allora $\|U\|_2 = 1$.
- 2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi e $U \in O(n)$, allora: $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|AU\|_2$.
- 3 Se $A \in S(n)$, allora, prendendo $U \in O(n)$ per cui $D = U^T A U$ sia diagonale, abbiamo

$$\|A\|_2 = \|U^T A U\|_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = \rho(A)$$

La (i) segue direttamente dalla definizione o dal fatto che

$$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(U^T U)} = \sqrt{\rho(I)} = 1.$$

Per la (ii) abbiamo: $\|UA\|_2 = \sqrt{\rho((UA)^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T U^T UA)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$.

Analogamente per l'altra uguaglianza.

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; per le norme matriciali introdotte in precedenza, valgono le seguenti relazioni

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F;$

(iv) $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|;$

(v) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_{\infty}};$

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; per le norme matriciali introdotte in precedenza, valgono le seguenti relazioni

$$(i) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F;$$

$$(iv) \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|;$$

$$(v) \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_{\infty}};$$

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; per le norme matriciali introdotte in precedenza, valgono le seguenti relazioni

$$(i) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F;$$

$$(iv) \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|;$$

$$(v) \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_{\infty}};$$

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; per le norme matriciali introdotte in precedenza, valgono le seguenti relazioni

$$(i) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F;$$

$$(iv) \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|;$$

$$(v) \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_{\infty}};$$

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; per le norme matriciali introdotte in precedenza, valgono le seguenti relazioni

- (i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$
- (ii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$
- (iii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F;$
- (iv) $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|;$
- (v) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_{\infty}};$

Proviamo la (i). Utilizzando le disuguaglianze vere per le norme vettoriali

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\|Ax\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

otteniamo

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Analogamente

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \quad \& \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

implicano

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

La dimostrazione della (ii) si lascia come esercizio.

Proviamo la (i). Utilizzando le disuguaglianze vere per le norme vettoriali

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\|Ax\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

otteniamo

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Analogamente

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \quad \& \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

implicano

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

La dimostrazione della (ii) si lascia come esercizio.

Proviamo la (i). Utilizzando le disuguaglianze vere per le norme vettoriali

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\|Ax\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

otteniamo

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Analogamente

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \quad \& \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

implicano

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

La dimostrazione della (ii) si lascia come esercizio.

Proviamo la (i). Utilizzando le disuguaglianze vere per le norme vettoriali

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\|Ax\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

otteniamo

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Analogamente

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \quad \& \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

implicano

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

La dimostrazione della (ii) si lascia come esercizio.

Proviamo la (i). Utilizzando le disuguaglianze vere per le norme vettoriali

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\|Ax\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

otteniamo

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\|A\|_\infty$$

Analogamente

$$\|Ax\|_\infty \leq \|Ax\|_2 \quad \& \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

implicano

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sqrt{n} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

La dimostrazione della (ii) si lascia come esercizio.

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (iii). Data una matrice A , la matrice $A^T A$ è una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Ricordando che $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i$, dove λ_i sono gli autovalori della matrice $A^T A$, si ha che

$$\max_i |\lambda_i| = \rho(A^T A) \leq \sum_i \lambda_i = \text{tr}(A^T A)$$

e dunque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \leq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \|A\|_F.$$

Proviamo la (iv). Osservando che

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{ij} |a_{ij}|^2} = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

una delle due disuguaglianze segue dalla disuguaglianza (iii).

Sia e_k il k -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$: si ha che

$$\|Ae_k\|_2 = \sqrt{\sum_i |a_{ik}|^2} \geq \max_i |a_{ik}|.$$

Ne segue l'altra disuguaglianza, essendo

$$\|A\|_2 \geq \max_k \|Ae_k\|_2 \geq \max_{ik} |a_{ik}|.$$

Proviamo la (v). Sia $\sigma_{\max} := \rho(A^T \cdot A)$. Dalla relazione

$$(A^T \cdot A)x = \sigma_{\max} x, \quad x \neq 0$$

passando alle norme si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \|x\|_{\infty} &= \|(A^T \cdot A)x\|_{\infty} \\ &\leq \|A^T\|_{\infty} \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} = \|A\|_1 \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

da cui segue, essendo $\|A\|_2^2 = \sigma_{\max}$,

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_{\infty}.$$



Proviamo la (v). Sia $\sigma_{\max} := \rho(A^T \cdot A)$. Dalla relazione

$$(A^T \cdot A)x = \sigma_{\max} x, \quad x \neq 0$$

passando alle norme si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \|x\|_{\infty} &= \|(A^T \cdot A)x\|_{\infty} \\ &\leq \|A^T\|_{\infty} \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} = \|A\|_1 \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

da cui segue, essendo $\|A\|_2^2 = \sigma_{\max}$,

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_{\infty}.$$



Proviamo la (v). Sia $\sigma_{\max} := \rho(A^T \cdot A)$. Dalla relazione

$$(A^T \cdot A)x = \sigma_{\max}x, \quad x \neq 0$$

passando alle norme si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} \|x\|_{\infty} &= \|(A^T \cdot A)x\|_{\infty} \\ &\leq \|A^T\|_{\infty} \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} = \|A\|_1 \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty}\end{aligned}$$

da cui segue, essendo $\|A\|_2^2 = \sigma_{\max}$,

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_{\infty}.$$



Proviamo la (v). Sia $\sigma_{\max} := \rho(A^T \cdot A)$. Dalla relazione

$$(A^T \cdot A)x = \sigma_{\max} x, \quad x \neq 0$$

passando alle norme si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \|x\|_{\infty} &= \|(A^T \cdot A)x\|_{\infty} \\ &\leq \|A^T\|_{\infty} \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} = \|A\|_1 \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

da cui segue, essendo $\|A\|_2^2 = \sigma_{\max}$,

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_{\infty}.$$



Lemma

Data una matrice invertibile L , l'applicazione

$$A \longrightarrow \|L^{-1}AL\|_{\infty}$$

è una norma matriciale indotta su $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(Suggerimento per la dimostrazione: segue dal fatto che $x \rightarrow \|L^{-1}x\|_{\infty}$ è una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$)

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora

comunque si prenda $\varepsilon > 0$, esiste almeno una norma matriciale indotta tale che

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Osservazione

Abbiamo provato in precedenza che $\rho(A) \leq \|A\|$ qualunque sia la norma, indotta o no. Non proveremo l'altra disuguaglianza.

Lemma

Data una matrice invertibile L , l'applicazione

$$A \longrightarrow \|L^{-1}AL\|_{\infty}$$

è una norma matriciale indotta su $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(Suggerimento per la dimostrazione: segue dal fatto che $x \rightarrow \|L^{-1}x\|_{\infty}$ è una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$)

Teorema

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora

comunque si prenda $\varepsilon > 0$, esiste almeno una norma matriciale indotta tale che

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Osservazione

Abbiamo provato in precedenza che $\rho(A) \leq \|A\|$ qualunque sia la norma, indotta o no. Non proveremo l'altra disuguaglianza.

Teorema

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- (i) $\lim_k \|B^k\| = 0$
- (ii) $\lim_k B^k v = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\rho(B) < 1$;
- (iv) esiste almeno una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|B\| < 1$.

Teorema

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- (i) $\lim_k \|B^k\| = 0$
- (ii) $\lim_k B^k v = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\rho(B) < 1$;
- (iv) esiste almeno una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|B\| < 1$.

Teorema

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- (i) $\lim_k \|B^k\| = 0$
- (ii) $\lim_k B^k v = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\rho(B) < 1$;
- (iv) esiste almeno una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|B\| < 1$.

Teorema

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- (i) $\lim_k \|B^k\| = 0$
- (ii) $\lim_k B^k v = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\rho(B) < 1$;
- (iv) esiste almeno una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|B\| < 1$.

Teorema

Sia $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Allora le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- (i) $\lim_k \|B^k\| = 0$
- (ii) $\lim_k B^k v = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\rho(B) < 1$;
- (iv) esiste almeno una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|B\| < 1$.

Proviamo che (i) $\implies$ (ii). Possiamo considerare una norma matriciale indotta. Per la consistenza tra la norma matriciale indotta e la norma vettoriale subordinata, si ha che $\|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\|$, da cui segue la tesi passando al limite.

Proviamo che (ii) $\implies$ (iii). Se per assurdo $\rho(B) \geq 1$, esiste un vettore $p \neq 0$ tale che

$$Bp = \lambda p, \quad \text{con } \lambda \geq 1.$$

Allora $B^k p = \lambda^k p$ non può convergere a 0.

Proviamo che (iii) $\implies$ (iv). Segue dal fatto che, preso $\varepsilon = (1 - \rho(B))/2$, esiste una norma matriciale indotta tale che

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon < 1.$$

Proviamo che (iv) $\implies$ (i). Segue dalla disuguaglianza

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k.$$

Proviamo che (i) $\implies$ (ii). Possiamo considerare una norma matriciale indotta. Per la consistenza tra la norma matriciale indotta e la norma vettoriale subordinata, si ha che $\|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\|$, da cui segue la tesi passando al limite.

Proviamo che (ii) $\implies$ (iii). Se per assurdo $\rho(B) \geq 1$, esiste un vettore $p \neq 0$ tale che

$$Bp = \lambda p, \quad \text{con } \lambda \geq 1.$$

Allora $B^k p = \lambda^k p$ non può convergere a 0.

Proviamo che (iii) $\implies$ (iv). Segue dal fatto che, preso $\varepsilon = (1 - \rho(B))/2$, esiste una norma matriciale indotta tale che

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon < 1.$$

Proviamo che (iv) $\implies$ (i). Segue dalla disuguaglianza

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k.$$

Proviamo che (i) $\implies$ (ii). Possiamo considerare una norma matriciale indotta. Per la consistenza tra la norma matriciale indotta e la norma vettoriale subordinata, si ha che $\|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\|$, da cui segue la tesi passando al limite.

Proviamo che (ii) $\implies$ (iii). Se per assurdo $\rho(B) \geq 1$, esiste un vettore $p \neq 0$ tale che

$$Bp = \lambda p, \quad \text{con } \lambda \geq 1.$$

Allora $B^k p = \lambda^k p$ non può convergere a 0.

Proviamo che (iii) $\implies$ (iv). Segue dal fatto che, preso $\varepsilon = (1 - \rho(B))/2$, esiste una norma matriciale indotta tale che

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon < 1.$$

Proviamo che (iv) $\implies$ (i). Segue dalla disuguaglianza

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k.$$

Proviamo che (i) $\implies$ (ii). Possiamo considerare una norma matriciale indotta. Per la consistenza tra la norma matriciale indotta e la norma vettoriale subordinata, si ha che $\|B^k v\| \leq \|B^k\| \|v\|$, da cui segue la tesi passando al limite.

Proviamo che (ii) $\implies$ (iii). Se per assurdo $\rho(B) \geq 1$, esiste un vettore $p \neq 0$ tale che

$$Bp = \lambda p, \quad \text{con } \lambda \geq 1.$$

Allora $B^k p = \lambda^k p$ non può convergere a 0.

Proviamo che (iii) $\implies$ (iv). Segue dal fatto che, preso $\varepsilon = (1 - \rho(B))/2$, esiste una norma matriciale indotta tale che

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon < 1.$$

Proviamo che (iv) $\implies$ (i). Segue dalla disuguaglianza

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k.$$