Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

Giovedì 05 marzo 2009

Successioni di Cauchy

Definizione

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato. Una successione* $\{\xi_n\} \subset X$ *si dice* `successione di Cauchy` *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \xi_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Successioni di Cauchy

Definizione

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato. Una successione* $\{\xi_n\} \subset X$ *si dice* `successione di Cauchy` *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \xi_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Si dice che la successione $\{\xi_n\}$ `converge` *a* $\ell \in X$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \ell\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Successioni di Cauchy

Definizione

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato. Una successione* $\{\xi_n\} \subset X$ *si dice* `successione di Cauchy` *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \xi_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Si dice che la successione $\{\xi_n\}$ `converge` *a* $\ell \in X$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \ell\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Teorema

Se $\{\xi_n\} \subset X$ *è convergente, allora è di Cauchy.*

Successioni di Cauchy

Definizione

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato. Una successione* $\{\xi_n\} \subset X$ *si dice* `successione di Cauchy` *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \xi_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Si dice che la successione $\{\xi_n\}$ `converge` *a* $\ell \in X$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|\xi_n - \ell\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Teorema

Se $\{\xi_n\} \subset X$ *è convergente, allora è di Cauchy.*

La dimostrazione è banale in quanto, se $\xi_n \to \ell \in X$, allora

$$\|\xi_n - \xi_m\| = \|\xi_n - \xi_m + \ell - \ell\| \leq \|\xi_n - \ell\| + \|\ell - \xi_m\|$$

e visto che i due termini a secondo memembro sono entrambi infinitesimi, segue la tesi.

Successioni di Cauchy

Quando $X = \mathbb{R}^n$ vale anche il viceversa

Teorema (IMPORTANTE)

Sia $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^n$. *Allora:*

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R}^n : \; \xi_n \to \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \{\xi_n\} \text{ è di Cauchy.}$$

Successioni di Cauchy

Quando $X = \mathbb{R}^n$ vale anche il viceversa

Teorema (IMPORTANTE)

Sia $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^n$*. Allora:*

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R}^n : \ \xi_n \to \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \{\xi_n\} \text{ è di Cauchy.}$$

Osservazione

Nella definizione di successione di Cauchy non compare il limite della successione: in $\mathbb{R}^n$ *sapere che* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ *quando* $n, m \geq k = k(\varepsilon)$ *ha come conseguenza che esiste* $\ell \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $x_n \to \ell$*.*

Successioni di Cauchy

Quando $X = \mathbb{R}^n$ vale anche il viceversa

Teorema (IMPORTANTE)

Sia $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^n$. *Allora:*

$$\exists\, \ell \in \mathbb{R}^n : \ \xi_n \to \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \{\xi_n\} \text{ è di Cauchy.}$$

Osservazione

Nella definizione di successione di Cauchy non compare il limite della successione: in $\mathbb{R}^n$ *sapere che* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ *quando* $n, m \geq k = k(\varepsilon)$ *ha come conseguenza che esiste* $\ell \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $x_n \to \ell$.

Esempio

(i) *La successione* $\{\frac{n-1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è di Cauchy in* $\mathbb{R}$, *e* $x_n \to 1$.

(ii) *La successione* $\{\frac{e^n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ **non** *è di Cauchy in* $\mathbb{R}$, *e* $x_n \to +\infty$.

Successioni di Cauchy

Definizione

Uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|)$ *si dice* `completo` *se ogni successione di Cauchy è convergente.*

Successioni di Cauchy

Definizione

Uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|)$ *si dice* `completo` *se ogni successione di Cauchy è convergente.*

Osservazione

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ *è normato completo. Idem per* $\mathbb{C}^n$ *con la norma naturale.*

Contrazioni

Definizione

Una funzione $f : X \to X$, *con* $(X, \|\cdot\|)$ *spazio vettoriale normato, è detta* `contrazione` *se essa è* $L-$*Lipschitziana con costante* $L < 1$, *ovvero se esiste* $L < 1$ *tale che*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \textit{per ogni } x, y \in X. \tag{0.1}$$

Contrazioni

Definizione

Una funzione $f : X \to X$, con $(X, \|\cdot\|)$ spazio vettoriale normato, è detta `contrazione` *se essa è $L-$Lipschitziana con costante $L < 1$, ovvero se esiste $L < 1$ tale che*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \textit{per ogni } x, y \in X. \tag{0.1}$$

Esempio

- *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Questa funzione è una contrazione su $[0,1]$. Infatti:*

$$L = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\frac{x}{2}| = \frac{1}{2} < 1.$$

- *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Questa funzione NON è una contrazione su $[0,1]$. Infatti:*

$$L = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |2x| = 2 > 1.$$

Il teorema delle contrazioni

Teorema (Il teorema delle contrazioni)

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato completo ed* $f : X \to X$ *una contrazione. Allora esiste ed è unico* $\hat{x} \in X$ *tale che* $f(\hat{x}) = \hat{x}$*. Il punto* $\hat{x}$ *è detto* `punto fisso` *(o* `unito`*) di* f *in* X*.*

Il teorema delle contrazioni

Teorema (Il teorema delle contrazioni)

Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato completo ed* $f : X \to X$ *una contrazione. Allora esiste ed è unico* $\hat{x} \in X$ *tale che* $f(\hat{x}) = \hat{x}$*. Il punto* $\hat{x}$ *è detto* `punto fisso` *(o* `unito`*) di* f *in* X*.*

Osservazione (IMPORTANTE)

Vogliamo sottolineare che richiedere che f *sia una funzione L-Lipschitziana con* $L \in]0, 1[$ *è essenziale per garantire sia l'esistenza che l'unicità di un punto fisso di* f*.*

- *la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definita da* $f(x) = x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, è anch'essa* 1*-Lipschitziana ed ogni* $x \in \mathbb{R}$ *è punto fisso di* f*.*
- *La funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definita da* $f(x) = x + 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, è* 1*-Lipschitziana, ma non ha alcun punto fisso.*
- *La funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definita da* $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, è* 1*-Lipschitziana e inoltre*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

  ma non ha alcun punto fisso.

Se esiste, il punto fisso di f è unico.

Se per assurdo esistessero due punti fissi $x_0 \neq x_1$, si avrebbe

$$\|x_0 - x_1\| = \|f(x_0) - f(x_1)\| \leq L\|x_0 - x_1\|.$$

che è un'ovvia contraddizione poiché $L < 1$.

Esiste almeno un punto fisso per f.

Si procede come segue:

Esiste almeno un punto fisso per f.

Si procede come segue:

- fissiamo ad arbitrio $x_0 \in X$ e costruiamo la successione $\{x_n\}$, per ricorsione, ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$.

Esiste almeno un punto fisso per f.

Si procede come segue:

- fissiamo ad arbitrio $x_0 \in X$ e costruiamo la successione $\{x_n\}$, per ricorsione, ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$.
- dimostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, ed essendo $(X, \| \cdot \|)$ completo, x_n converge ad un certo $\hat{x} \in X$.

Esiste almeno un punto fisso per f.

Si procede come segue:

- fissiamo ad arbitrio $x_0 \in X$ e costruiamo la successione $\{x_n\}$, per ricorsione, ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$.
- dimostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, ed essendo $(X, \|\cdot\|)$ completo, x_n converge ad un certo $\hat{x} \in X$.
- essendo $0 \leq \|f(x_n) - f(\hat{x})\| \leq L\|x_n - \hat{x}\|$, si ha che $f(x_n)$ converge a $f(\hat{x})$ per $n \longrightarrow +\infty$

Esiste almeno un punto fisso per f.

Si procede come segue:

- fissiamo ad arbitrio $x_0 \in X$ e costruiamo la successione $\{x_n\}$, per ricorsione, ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \geq 1$.
- dimostriamo che $\{x_n\}$ è di Cauchy, ed essendo $(X, \|\cdot\|)$ completo, x_n converge ad un certo $\hat{x} \in X$.
- essendo $0 \leq \|f(x_n) - f(\hat{x})\| \leq L\|x_n - \hat{x}\|$, si ha che $f(x_n)$ converge a $f(\hat{x})$ per $n \longrightarrow +\infty$
- Pertanto si ha
$$\hat{x} = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\hat{x}),$$
e questo mostra che $\hat{x}$ è un punto fisso di f.

La successione $\{x_n\}$ è di Cauchy

Fissiamo ora $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Dalla disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\|.$$

La successione $\{x_n\}$ è di Cauchy

Fissiamo ora $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Dalla disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\|.$$

Utilizzando la formula (0.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq L^{n-1}\|x_1 - x_0\| + L^{n-2}\|x_1 - x_0\| + \ldots + L^m\|x_1 - x_0\| \\
&= \|x_1 - x_0\| L^m \sum_{k=0}^{n-m-1} L^k \\
&= \|x_1 - x_0\| L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L} \\
&\leq \|x_1 - x_0\| \frac{L^m}{1 - L},
\end{aligned}$$

La successione $\{x_n\}$ è di Cauchy

Fissiamo ora $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Dalla disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\|.$$

Utilizzando la formula (0.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \ldots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq L^{n-1}\|x_1 - x_0\| + L^{n-2}\|x_1 - x_0\| + \ldots + L^m\|x_1 - x_0\| \\
&= \|x_1 - x_0\| L^m \sum_{k=0}^{n-m-1} L^k \\
&= \|x_1 - x_0\| L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L} \\
&\leq \|x_1 - x_0\| \frac{L^m}{1 - L},
\end{aligned}$$

Ne segue che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Infatti, poiché $L \in [0, 1[$, per ogni dato $\varepsilon > 0$ è possibile fissare $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_1 - x_0\| \frac{L^m}{1 - L} \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } m \geq n_0,$$

e, quindi, per ogni $n \geq m \geq n_0$ si ha che $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$.

Norme matriciali

Abbiamo dato la seguente definizione di norma

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità)*.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare)*.

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Osservazione

Quando si consideri lo spazio $X = \mathbb{R}^{n \times n}$, possiamo introdurre la nozione di norma matriciale, che soddisfa tutti gli assiomi visti nella precedente definizione insieme ad un nuovo assioma [(iv)].

Norme matriciali

Con $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ si intende una matrice $n \times n$ a termini reali (o complessi), con $A \cdot B$ l'usuale prodotto righe per colonne, con $C = A + B$ la matrice avente come coefficienti $C = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ e con 0 si intende la matrice $n \times n$ avente tutti i termini nulli.

Definizione

Una applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ *è detta* `norma matriciale` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A\| \ge 0$;
$\|A\| = 0$ *se, e soltanto se,* $A = 0$.

(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità).*

(iii) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *(disuguaglianza triangolare).*

(iv) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *(submoltiplicatività).*

Definizione

Data una norma (matriciale) $\|\cdot\|$ *su* $\mathbb{R}^{n^2}$, *questa si dice* `compatibile (o consistente)` *con la norma vettoriale* $\|\cdot\|_*$ *su* $\mathbb{R}^n$ *se*

$$\|Ax\|_* \le \|A\| \|x\|_* \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Norme matriciali

Esempio (Norma di Frobenius)

L'applicazione $A \longrightarrow \|A\|_F = \sqrt{tr(A^T \cdot A)}$ *è una norma matriciale, detta di Frobenius. Per quanto riguarda la verifica delle prime 3 condizioni non c'e' nulla da provare, in quanto se si pensa alla matrice come un vettore a di* n^2 *elementi, allora si ha che* $\|A\|_F = \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}^2|}$ *che è vero in quanto la* $\|\cdot\|_2$ *è una norma su* $\mathbb{R}^{n^2}$*.*
Per la quarta condizione, se $C = A \cdot B = (\sum_k a_{ik} b_{kj})_{1 \leq i,j \leq n}$*, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ci dice che*

$$|c_{ij}|^2 = \left|\sum_k a_{ik} b_{kj}\right|^2 \leq \left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_k |b_{jk}|^2\right)$$

da cui segue che

$$\|C\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_k |a_{ik}|^2\right) \sum_{j=1}^n \left(\sum_k |b_{jk}|^2\right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2.$$

Norme naturali (indotte o subordinate)

Se si considera la matrice $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ come applicazione lineare, allora una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$ induce sullo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ una norma matriciale.

Definizione

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|_*$ sullo spazio $\mathbb{R}^n$, diciamo `norma matriciale indotta` *sullo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{n\times n}$ la seguente applicazione da $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$*

$$A \to \|A\|_* := \max_{\|x\|_*=1} \|Ax\|_*$$

Osservazione

- *L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_* = 1\}$ è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, e l'applicazione che porta $x \mapsto \|Ax\|_*$ è continua, quindi per il teorema di Weierstrass esiste $u \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_* = 1\}$ tale che $\max_{\|x\|_*=1} \|Ax\|_* = \|Au\|_*$.*
- *Per ogni $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha $\frac{y}{\|y\|_*} \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_* = 1\}$. Posto $x = y/\|y\|_*$, si ha, per la linearità di A*

$$\|Ax\|_* = \|A\frac{y}{\|y\|_*}\|_* = \frac{\|Ay\|_*}{\|y\|_*}$$

Questo implica che

$$\|A\|_* := \max_{\|x\|_*=1} \|Ax\|_* = \max_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_*}{\|y\|_*}.$$

Osservazione

Una norma indotta risulta compatibile, infatti

$$\|A\|_* = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \geq \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$$

Teorema

La norma indotta è una norma matriciale nel senso della definizione data in precedenza

Verifichiamo la submoltiplicatività. In tal caso, essendo la norma matriciale compatibile con la norma vettoriale,

$$\|(A \cdot B)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$$

e quindi

$$\|A \cdot B\| := \max_{\|x\|=1} \|(A \cdot B)x\| \leq \|A\|\|B\|$$

Osservazione

Non tutte le norme matriciali sono indotte: la norma di Frobenius non è indotta! Questo sarà conseguenza del fatto che $\|I\|_F = \sqrt{n} \neq 1$.

Esempi di norme indotte

Esempio

La norma vettoriale $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ *induce la seguente norma matriciale*

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Esempio

La norma vettoriale $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ *induce la seguente norma matriciale*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)}$$

dove $\lambda_1 = \rho(A^T \cdot A)$ *è il massimo degli autovalori di* $A^T \cdot A$ *(si osservi che la matrice* $A^T \cdot A$ *è simmetrica, e quindi ha tutti gli autovalori reali; essi sono anche non negativi).*

Esercizio

La norma vettoriale $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ *induce la seguente norma matriciale*

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Vediamo la $\|\cdot\|_1$. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|x\|_1 = 1$. Allora

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n (|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}|) \\ &\leq \left[\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right] \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= \left[\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right] \end{aligned}$$

e quindi

$$\|A\|_1 := \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Ora bisogna verificare che esiste un vettore per cui c'è uguaglianza. Sia k l'indice tale che

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Preso $x = e_k$, il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ (quello con tutti le componenti nulle tranne che la k-esima in cui vale 1), si ha

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

e quindi abbiamo provato che vale l'uguaglianza.