Calcolo Numerico A - a.a. 2008/09

02 marzo 2009

Docenti

Marino Belloni
&
Costantino Medori
&
Luca Consolini

Orario Lezioni

Lunedì dalle 14.30 alle 16.30 (aula O)
Giovedì dalle 14.30 alle 16.30 (aula O)
Venerdì dalle 08.30 alle 10.30 (aula B1)
Le lezioni del venerdi' partiranno il 13 marzo

Docenti

Marino Belloni
&
Costantino Medori
&
Luca Consolini

Orario Lezioni

Lunedì dalle 14.30 alle 16.30 (aula O)
Giovedì dalle 14.30 alle 16.30 (aula O)
Venerdì dalle 08.30 alle 10.30 (aula B1)
Le lezioni del venerdi' partiranno il 13 marzo

Modalita' d'esame

L'esame consiste di una prova scritta, in cui il candidato deve ottenere una votazione maggiore o uguale a 18/30.
Il candidato che ottiene una votazione maggiore o uguale a 18/30 *nella prova scritta, può verbalizzare il voto.*
L'esame orale è a discrezione del docente.

Testi Consigliati

Da comunicare.

Note

Per eventuali richieste, utilizzare gli indirizzi di posta elettronica

- *Marino Belloni : marino.belloni@unipr.it*
- *Costantino Medori : costantino.medori@unipr.it*
- *Luca Consolini : luca.consolini@polirone.mn.it*

Gli studenti sono invitati a

- *utilizzare il loro indirizzo nome.cognome@studenti.unipr.it*
- *non abusare del servizio, ovvero contattare quando necessario.*

Prerequisiti

- *Successioni numeriche.*
- *Studio del grafico di una funzione.*
- *Formula di Taylor con resto di Lagrange.*
- *Integrali definiti.*
- *Matrici (rango, operazioni elementari di riga, triangolarizzazione, diagonalizzazione)*
- *Sistemi lineari (teorema di Rouchè-Capelli, teorema di Cramer).*

Esempio (Algoritmo di Erone)

Sia $\alpha > 0$ un fissato numero reale. Si consideri la successione

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \\ x_0 > \sqrt{\alpha} \end{cases}$$

Allora

(i) $\sqrt{\alpha} < x_{n+1} < x_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$;

(iii) *posto* $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{\alpha}$, *si ha* $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $\varepsilon_{n+1} < 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n+1}}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(v)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{\alpha}}{(x_n - \sqrt{\alpha})^p} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & \text{se } p = 2 \end{cases}$$

Soluzione (i)

Si prova per induzione. Proviamo che

- $x_1 < x_0$

infatti $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0} < x_0$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_0} < \frac{1}{2}x_0$ **sse** $\alpha < x_0^2$;

Soluzione (i)

Si prova per induzione. Proviamo che

- $x_1 < x_0$

infatti $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0} < x_0$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_0} < \frac{1}{2}x_0$ **sse** $\alpha < x_0^2$;

- $\sqrt{\alpha} < x_1$

infatti $\sqrt{\alpha} < x_1$ **sse** $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0}$ **sse** $2x_0\sqrt{\alpha} < x_0^2 + \alpha$ **sse** $(x_0 - \sqrt{\alpha})^2 > 0$

Soluzione (i)

Si prova per induzione. Proviamo che

- $x_1 < x_0$

infatti $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0} < x_0$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_0} < \frac{1}{2}x_0$ **sse** $\alpha < x_0^2$;

- $\sqrt{\alpha} < x_1$

infatti $\sqrt{\alpha} < x_1$ **sse** $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0}$ **sse** $2x_0\sqrt{\alpha} < x_0^2 + \alpha$ **sse** $(x_0 - \sqrt{\alpha})^2 > 0$

Facciamo ora l'ipotesi induttiva

- $\sqrt{\alpha} < x_n < x_{n-1}$

Soluzione (i)

Si prova per induzione. Proviamo che

- $x_1 < x_0$

infatti $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0} < x_0$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_0} < \frac{1}{2}x_0$ **sse** $\alpha < x_0^2$;

- $\sqrt{\alpha} < x_1$

infatti $\sqrt{\alpha} < x_1$ **sse** $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0}$ **sse** $2x_0\sqrt{\alpha} < x_0^2 + \alpha$ **sse** $(x_0 - \sqrt{\alpha})^2 > 0$

Facciamo ora l'ipotesi induttiva

- $\sqrt{\alpha} < x_n < x_{n-1}$

Proviamo che

- $x_{n+1} < x_n$

infatti $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} < x_n$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_n} < \frac{1}{2}x_n$ **sse** $\alpha < x_n^2$ *che è vera perchè vale l'ipotesi induttiva*;

Soluzione (i)

Si prova per induzione. Proviamo che

- $x_1 < x_0$

infatti $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0} < x_0$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_0} < \frac{1}{2}x_0$ **sse** $\alpha < x_0^2$;

- $\sqrt{\alpha} < x_1$

infatti $\sqrt{\alpha} < x_1$ **sse** $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}x_0 + \frac{\alpha}{2x_0}$ **sse** $2x_0\sqrt{\alpha} < x_0^2 + \alpha$ **sse** $(x_0 - \sqrt{\alpha})^2 > 0$

Facciamo ora l'ipotesi induttiva

- $\sqrt{\alpha} < x_n < x_{n-1}$

Proviamo che

- $x_{n+1} < x_n$

infatti $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} < x_n$ **sse** $\frac{\alpha}{2x_n} < \frac{1}{2}x_n$ **sse** $\alpha < x_n^2$ *che è vera perchè vale l'ipotesi induttiva*;

- $\sqrt{\alpha} < x_{n+1}$

infatti $\sqrt{\alpha} < x_{n+1}$ **sse** $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n}$ **sse** $2x_n\sqrt{\alpha} < x_n^2 + \alpha$ **sse** $(x_n - \sqrt{\alpha})^2 > 0$ *che è vera perchè vale l'ipotesi induttiva.*

Soluzione (ii)

Per quanto provato in (i)*, la successione* x_n *è monotona decrescente e limitata inferiormente da* $\sqrt{\alpha}$*, quindi converge ad un limite* ℓ*.*
Inoltre questo limite deve soddisfare

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{\ell}\right)$$

ovvero

$$\ell^2 = \alpha.$$

Soluzione (iii)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= x_1 - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2}x_0 + \tfrac{\alpha}{2x_0} - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2x_0}\left(x_0^2 + \alpha - 2x_0\sqrt{\alpha}\right) = \tfrac{\varepsilon_0^2}{2x_0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= x_2 - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{\alpha}{2x_1} - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2x_1}\left(x_1^2 + \alpha - 2x_1\sqrt{\alpha}\right) = \tfrac{\varepsilon_1^2}{2x_1}
\end{aligned}
$$

$$....$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{\alpha}{2x_n} - \sqrt{\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + \alpha - 2x_n\sqrt{\alpha}\right) = \tfrac{\varepsilon_n^2}{2x_n}
\end{aligned}
$$

La seconda stima - col minore stretto - segue immediatamente dal fatto che $x_n > \sqrt{\alpha}$.

Soluzione (iv)

Segue da (iii),osservando che

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0^2}{2\sqrt{\alpha}} = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{0+1}}$$

come pure

$$\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1^2}{2\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)^2 = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{1+1}}$$

$$.....$$

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}} < ... < 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n+1}}$$

Soluzione (v)

Si osserva che

$$\left(x_{n+1} - \sqrt{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{2}x_n + \frac{\alpha}{2x_n} - \sqrt{\alpha}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{\alpha}\right)^2$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{\alpha}}{(x_n - \sqrt{\alpha})^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2x_n}\frac{(x_n - \sqrt{\alpha})^2}{(x_n - \sqrt{\alpha})^p} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \sqrt{\alpha}\right)^{2-p}$$

da cui segue la tesi.

Vale la pena di osservare quanto converge rapidamente questa successione.

Note

Preso $\alpha = 3$ *e* $x_0 = 2 > \sqrt{3}$, *si ha che*

$$\varepsilon_4 = x_4 - \sqrt{3} < 2\sqrt{3}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{3}}\right)^{2^4} = 2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^{2^4} < 2\sqrt{3}\frac{1}{10^{16}} < 4\cdot 10^{-16}$$

ovvero *dopo 4 iterazioni*

$$\varepsilon_4 < 4\cdot 10^{-16}$$

Esempio

Sia $\alpha > 0$ *un fissato numero reale e* $p > 1$. *Si consideri la successione*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} \\ x_0 > \alpha^{1/p} \end{cases}$$

(i) $\alpha^{1/p} < x_{n+1} < x_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha^{1/p}$;

(iii) *etc*

Esempio

Sia $\alpha > 0$ un fissato numero reale e $p > 1$. Si consideri la successione

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} \\ x_0 > \alpha^{1/p} \end{cases}$$

(i) $\alpha^{1/p} < x_{n+1} < x_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha^{1/p}$;

(iii) *etc*

Osservazione

Quando $p = 2$, questa successione altro non è che l'algoritmo di Erone.

Esempio

Sia $\alpha > 0$ *un fissato numero reale e* $p > 1$. *Si consideri la successione*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} \\ x_0 > \alpha^{1/p} \end{cases}$$

(i) $\alpha^{1/p} < x_{n+1} < x_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha^{1/p}$;

(iii) *etc*

Osservazione

Quando $p = 2$, *questa successione altro non è che l'algoritmo di Erone.*

Osservazione

Il parametro p *non è necessario sia un intero!*

Soluzione

Si procede come nell'esercizio precedente. Ad esempio

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p x_n^{p-1}} < x_n$$

equivale a

$$(p-1)x_n^p + \alpha < p x_n^p$$

ovvero equivale a

$$\alpha < x_n^p.$$

Nel provare il punto (v)*, risulta necessaria l'identità*

$$(x_n^p - \alpha) = (x_n - \alpha^{1/p})(x_n^{p-1} + x_n^{p-2}\alpha^{1/p} + \ldots + \alpha^{(p-1)/p})$$

Inoltre, se $x_n > \alpha^{1/p}$ *allora*

$$p x_n^{p-1} > (x_n^{p-1} + x_n^{p-2}\alpha^{1/p} + \ldots + \alpha^{(p-1)/p}).$$

Spazi vettoriali normati

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Spazi vettoriali normati

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Esempio

(i) *Preso* $X = \mathbb{R}$ *e* $\|x\| := |x|$, *questa è una norma.*

Spazi vettoriali normati

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità)*.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare)*.

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Esempio

(i) *Preso* $X = \mathbb{R}$ *e* $\|x\| := |x|$, *questa è una norma.*

(ii) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *questa è una norma.*

Spazi vettoriali normati

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità)*.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare)*.

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Esempio

(i) *Preso* $X = \mathbb{R}$ *e* $\|x\| := |x|$, *questa è una norma.*

(ii) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *questa è una norma.*

(iii) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ *questa è una norma (la norma euclidea).*
Per dimostrare la disuguaglianza triangolare va utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|(x \cdot y)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Spazi vettoriali normati

Definizione

Sia dato uno spazio vettoriale X. Una applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è detta `norma` *se soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$;
$\|x\| = 0$ *se, e soltanto se,* $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogeneità).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$ *(disuguaglianza triangolare).*

Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ *viene detto* `spazio normato`

Esempio

(i) *Preso* $X = \mathbb{R}$ *e* $\|x\| := |x|$, *questa è una norma.*

(ii) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ *questa è una norma.*

(iii) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ *questa è una norma (la norma euclidea). Per dimostrare la disuguaglianza triangolare va utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* $|(x \cdot y)| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

(iv) *Preso* $X = \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *questa è una norma.*

Spazi vettoriali normati

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\quad |(x \cdot y)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$

Spazi vettoriali normati

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\quad |(x \cdot y)| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \le \|x\|_2 \|y\|_2.$

Osserviamo che $\|x\|_2 = \sqrt{(x \cdot x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Si che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le (x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = (x \cdot x) - 2\lambda(x \cdot y) + \lambda^2 (y \cdot y)$$

La disequazione di secondo grado deve esser soddisfatta per ogni λ, per cui

$$|(x \cdot y)|^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \le 0$$

ovvero

$$|(x \cdot y)| \le \sqrt{(x \cdot x)}\sqrt{(y \cdot y)} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

Spazi vettoriali normati

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\quad |(x \cdot y)| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \le \|x\|_2 \|y\|_2$.

Osserviamo che $\|x\|_2 = \sqrt{(x \cdot x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Si che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le (x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = (x \cdot x) - 2\lambda (x \cdot y) + \lambda^2 (y \cdot y)$$

La disequazione di secondo grado deve esser soddisfatta per ogni λ, per cui

$$|(x \cdot y)|^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \le 0$$

ovvero

$$|(x \cdot y)| \le \sqrt{(x \cdot x)}\sqrt{(y \cdot y)} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

Osservazione

Per provare la disuguaglianza triangolare nel caso della norma euclidea $\|\cdot\|_2$

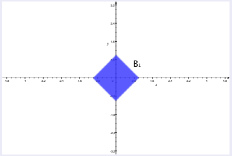
$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 = (x + y) \cdot (x + y) &= (x \cdot x) + (y \cdot y) + 2(x \cdot y) \\ &= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x \cdot y) \\ (Cauchy - Schwarz) \quad &\le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 \\ &= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2. \end{aligned}$$

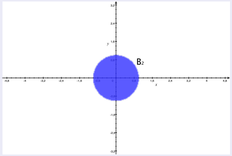
Spazi vettoriali normati

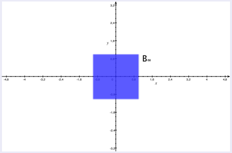
Osservazione

Nello spazio $\mathbb{R}^2$, *definiamo*

$$
\begin{aligned}
B_1(R) &= \{(x,y) : \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| < R\} \\
B_2(R) &= \{(x,y) : \|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < R\} \\
B_\infty(R) &= \{(x,y) : \|(x,y)\|_\infty = max\{|x|, |y|\} < R\}
\end{aligned}
$$



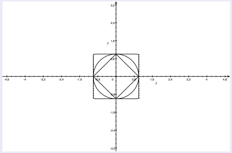




Spazi vettoriali normati

Osservazione

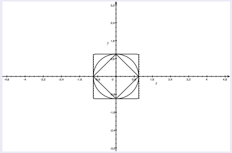
Le tre norme introdotte in precedenza possono essere confrontate tra loro:



Spazi vettoriali normati

Osservazione

Le tre norme introdotte in precedenza possono essere confrontate tra loro:



Teorema (Equivalenza tra norme in $\mathbb{R}^n$)

Sia $x \in \mathbb{R}^n$. *Valgono le seguenti disuguaglianze*

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

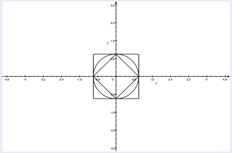
(ii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(iii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Spazi vettoriali normati

Osservazione

Le tre norme introdotte in precedenza possono essere confrontate tra loro:



Teorema (Equivalenza tra norme in $\mathbb{R}^n$)

Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Valgono le seguenti disuguaglianze

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

(ii) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(iii) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

ovvero valgono le seguenti inclusioni

(i)' $\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_1 \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_2 \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_1 \le \sqrt{n}\}$

(ii)' $\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_2 \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_\infty \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_2 \le \sqrt{n}\}$

(iii)' $\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_1 \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_\infty \le 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_1 \le n\}$

Spazi vettoriali normati

Dimostriamo la (i) nel caso $n = 2$. La seguente disuguaglianza

$$\|(x,y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = \|(x,y)\|_1^2$$

è vera, e quindi si è provato che $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$.

Spazi vettoriali normati

Dimostriamo la (i) nel caso $n = 2$. La seguente disuguaglianza

$$\|(x,y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = \|(x,y)\|_1^2$$

è vera, e quindi si è provato che $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$.
Analogamente si ha che

$$\|(x,y)\|_1^2 = (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2(x^2 + y^2) = 2\|(x,y)\|_2^2$$

è vera, e dunque $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2$.

Spazi vettoriali normati

Dimostriamo la (i) nel caso $n = 2$. La seguente disuguaglianza

$$\|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = \|(x, y)\|_1^2$$

è vera, e quindi si è provato che $\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$.
Analogamente si ha che

$$\|(x, y)\|_1^2 = (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2(x^2 + y^2) = 2\|(x, y)\|_2^2$$

è vera, e dunque $\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x, y)\|_1 \leq \|(x, y)\|_2$.

Dimostriamo la (i)' nel caso $n = 2$, una volta che sia nota la (i).
Basta osservare che, essendo $\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$, si ha che

$$\|(x, y)\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|(x, y)\|_2 \leq 1$$

e quindi

$$\{\|(x, y)\|_1 \leq 1\} \subseteq \{\|(x, y)\|_2 \leq 1\}$$

Spazi vettoriali normati

Dimostriamo la (i) nel caso $n = 2$. La seguente disuguaglianza

$$\|(x,y)\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = \|(x,y)\|_1^2$$

è vera, e quindi si è provato che $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$.
Analogamente si ha che

$$\|(x,y)\|_1^2 = (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq 2(x^2 + y^2) = 2\|(x,y)\|_2^2$$

è vera, e dunque $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2$.

Dimostriamo la (i)' nel caso $n = 2$, una volta che sia nota la (i).
Basta osservare che, essendo $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$, si ha che

$$\|(x,y)\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|(x,y)\|_2 \leq 1$$

e quindi

$$\{\|(x,y)\|_1 \leq 1\} \subseteq \{\|(x,y)\|_2 \leq 1\}$$

Analogamente, da $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$ segue che

$$\|(x,y)\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}$$

e quindi

$$\{\|(x,y)\|_2 \leq 1\} \subseteq \{\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\}$$

Spazi vettoriali normati

Dimostriamo la (ii) nel caso $n = 2$. La seguente disuguaglianza

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \|(x, y)\|_2$$

è vera, e quindi si è provato che $\|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2$.
Analogamente si ha che

$$\|(x, y)\|_2^2 = (|x|^2 + |y|^2) \leq |\max\{|x|, |y|\}|^2 + |\max\{|x|, |y|\}|^2 = 2\|(x, y)\|_\infty^2$$

è vera, e dunque $\|(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_\infty$.
etc.

Spazi vettoriali normati

Osservazione

- *Il teorema precedente stabilisce che le norme* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *sono tra loro equivalenti.*
- *L'equivalenza tra norme implica che le topologie indotte da queste norme sono tra loro equivalenti (se una successione converge nella norma* $\|\cdot\|_1$*, allora converge anche nella norma* $\|\cdot\|_\infty$ *e viceversa)*
- *Ma vale un risultato più generale: in* $\mathbb{R}^n$ *tutte le norme sono tra loro equivalenti (dipende dal fatto che la dimensione è finita).*