Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Correzione dei Quiz - scritto giugno 2009

23 giugno 2009

Esercizio (1)

Sia data la curva $\gamma : [1/2, \pi] \to R^2$ *di equazioni* $\gamma(t) = \left(t + \log(t+1) - 1, \frac{1}{t} \right)$. *Quale tra le seguenti affermazioni è* **vera***?*

1. γ *non è regolare.*
2. *La retta tangente in* $(1 + \log 3, 1/2)$ *ha equazione* $x + \frac{16}{3} y = \frac{11}{3} + \log 3$.
3. *La retta tangente in* $\gamma(2)$ *ha equazione* $3x - 16y + 5 - \log(27) = 0$.
4. γ *è chiusa.*

Soluzione (1)

Si osservi che $\gamma(2) = (1 + \log 3,\ 1/2)$. *Il vettore tangente, che esiste per* $t \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, *è* $\gamma'(t) = \left(\frac{t+2}{t+1}, -\frac{1}{t^2}\right)$, $\gamma'(2) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}\right)$. *La retta tangente in* $\gamma(2)$ *ha equazioni parametriche*

$$(x, y) = \gamma(2) + t\gamma'(2) = \left(1 + \log 3 + \frac{4}{3}t,\ \frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right), \qquad t \in R$$

e equazione cartesiana $x + \frac{16}{3}y = \frac{11}{3} + \log 3$.

1. γ *non è regolare.Questa risposta è falsa:* $[1/2, 2\pi] \subset]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, *regione dove la curva è regolare.*
2. *La retta tangente in* $(1 + \log 3,\ 1/2)$ *ha equazione* $x + \frac{16}{3}y = \frac{11}{3} + \log 3$. *Questa risposta è esatta.*
3. *La retta tangente in* $\gamma(2)$ *ha equazione* $3x - 16y + 5 - \log(27) = 0$. *Questa risposta è falsa: la retta tangente è* $x + \frac{16}{3}y = \frac{11}{3} + \log 3$.
4. γ *è chiusa. Questa risposta è falsa:* $\gamma(1/2) = 1/2 + \log(3/2) \neq (2\pi + \log(1 + 2\pi),\ 1/2\pi) = \gamma(2\pi)$. *Si osservi che la seconda componente di* $\gamma(t)$ *è* $y(t) = 1/t$, *che è iniettiva.*

Esercizio (2)

Sia data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \log(1 + x^2 + y^2)$. *Quale tra le seguenti risposte è* **falsa***?*

1. $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = -\frac{7\sqrt{2}}{6}$, *dove* $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
2. $\nabla f(1,0)$ *è ortogonale a* $(0,1)$.
3. *Nessuna delle altre risposte è vera.*
4. *Il piano tangente in* $(1,0,f(1,0))$ *è* $z = \log(2) - 2 + 3x$.

Soluzione (2)

La funzione $f(x,y)$ *è differenziabile su tutto* R^2, *e*

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \frac{2x}{1+x^2+y^2},\, 2y + \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right), \quad \nabla f(1,2) = \left(\frac{7}{3},\, \frac{14}{3}\right)$$

e $\nabla f(1,0) = (3,\,0)$. *Il piano tangente in* $(1,0,f(1,0)$ *ha equazione*

$$\begin{aligned} z &= f(1,0) + \langle \nabla f(1,0),\, (x-1,y)\rangle \\ &= 1 + \log 2 + 3(x-1) = \log 2 - 2 + 3x. \end{aligned}$$

Infine, per la differenziabilità , si ha che, preso $v = (1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle \nabla f(1,2),\, (1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})\rangle = -\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

1. $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = -\frac{7\sqrt{2}}{6}$, *dove* $v = (\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. *Questa risposta è vera: vedi sopra.*
2. $\nabla f(1,0)$ *è ortogonale a* $(0,1)$. *Questa risposta è vera: infatti* $\langle \nabla f(1,0),\, (0,1)\rangle = \langle (3,0),\, (0,1)\rangle = 0$.
3. *Nessuna delle altre risposte è vera. Questa risposta è falsa: tutte le altre risposte sono vere.*
4. *Il piano tangente in* $(1,0,f(1,0))$ *è* $z = \log(2) - 2 + 3x$. *Questa risposta è vera: vedi sopra.*

Esercizio (3)

Data $f(x,y) = y(2x+y)$ *e il triangolo* T *di vertici* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(0,1)$, *quale tra le seguenti affermazioni è* **vera**?

1. $\sup_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) = +\infty$.
2. $\exists (x_0,y_0) \in T$ *tale che* $f(x_0,y_0) < 4$.
3. $\max_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) > \max_{(x,y)\in\partial T} f(x,y)$.
4. $\max_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) < \min_{(x,y)\in\partial T} f(x,y)$.

Soluzione (3)

L'insieme $\overline{T}$ *è chiuso e limitato e* $f(x,y)$ *è di classe* $C^2(R^2)$*, dunque esistono finiti massimo e minimo. I punti stazionari di* f *sono le soluzioni di* $\nabla f(x,y) = (2y,\ 2x+2y) = (0,0)$*: il punto* $(0,0) \in \partial T$*. Dunque in* $T \setminus \partial T$ *la funzione non assume né massimo né minimo, che stanno entrambi su* ∂T*. La frontiera è parametrizzata da*

$$\gamma_1(t) = (t,0),\ \gamma_2(t) = (t,1-t),\ \gamma_3(t) = (0,t),\ t \in [0,1]$$

e le restrizioni di f *a questi tratti sono*

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 0,\ g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 1-t^2,\ g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t^2,\ t \in [0,1].$$

Si trova che

$$\max_{(x,y)\in\partial T} f(x,y) = \max\left\{ \max_{t\in[0,1]} g_1(t),\ \max_{t\in[0,1]} g_2(t),\ \max_{t\in[0,1]} g_3(t) \right\} = g_2(0) = g_3(0) = 1 = f(0,1)$$

Soluzione (3)

1. $\sup_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) = +\infty$. *Questa risposta è falsa: la funzione ha massimo in* $\overline{T}$ *pari a* 1.
2. $\exists (x_0, y_0) \in T$ *tale che* $f(x_0, y_0) < 4$. *Questa risposta è vera: essendo il massimo della funzione in* $\overline{T}$ *pari a* 1, *esistono infiniti punti che soddisfano la disuguaglianza*
3. $\max_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) > \max_{(x,y)\in\partial T} f(x,y)$. *Questa risposta è falsa: il massimo della funzione cade sulla frontiera, e quindi* $\max_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial T} f(x,y)$
4. $\max_{(x,y)\in\overline{T}} f(x,y) < \min_{(x,y)\in\partial T} f(x,y)$. *Questa risposta è falsa qualunque sia l'insieme* T *e qualunque sia la funzione* f.

Esercizio (4)

Sia $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 1$. *Quale tra le seguenti affermazioni è* **vera***?*

1. $\nexists \min_{(x,y)\in[-3,3]\times[-4,4]} f(x,y)$.
2. *Non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2+1}$.
3. f *ha un punto di minimo relativo in* $(1,2)$.
4. f *è limitata in* R^2.

Soluzione (4)

La funzione f è ci classe C^2 su tutto R^2, quindi possiamo studiare la natura dei suoi punti stazionari, ovvero delle soluzioni di $\nabla f(x,y) = (2x-2,\ 4y-8)$. Si trova il solo punto $1,2$, ed essendo

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = H_f(1,2)$$

si ottiene che $(1,2)$ è punto di minimo relativo.

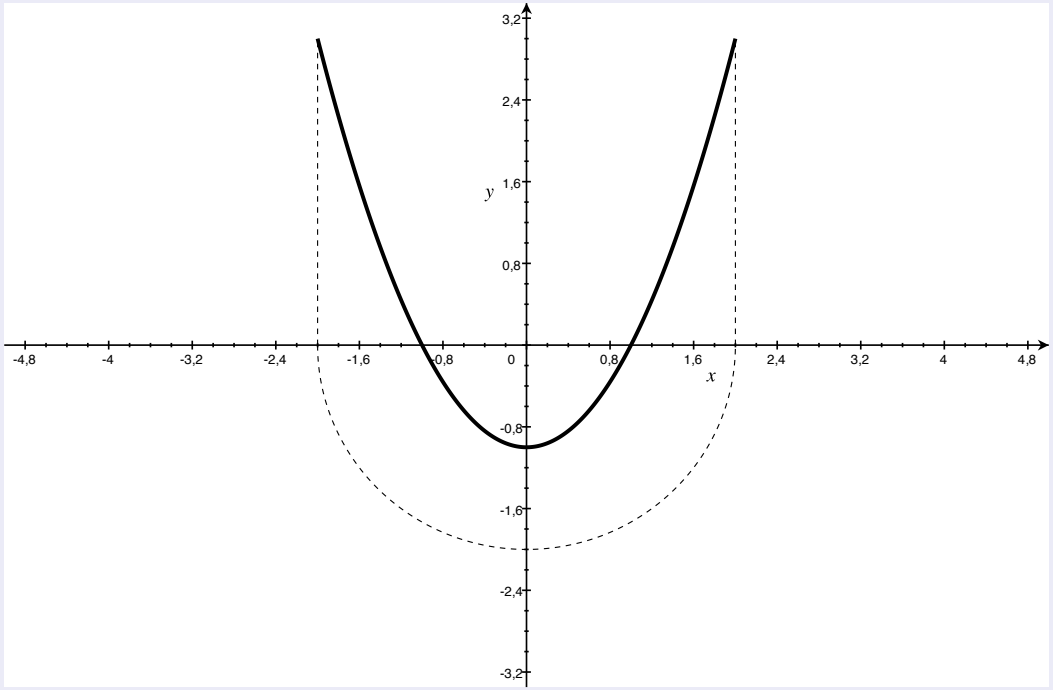
1. $\nexists \min_{(x,y)\in[-3,3]\times[-4,4]} f(x,y)$. *Questa risposta è falsa: la funzione f è continua e l'insieme $[-3,3]\times[-4,4]$ è chiuso e limitato, dunque il minimo esiste per il teorema di Weierstrass.*
2. *Non esiste* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2+1}$. *Questa risposta è falsa: la funzione* $\frac{f(x,y)}{x^2+y^2+1}$ *è continua in $(0,0)$, e dunque il limite esiste e vale* $\frac{f(0,0)}{1} = 1$
3. *f ha un punto di minimo relativo in $(1,2)$. Questa risposta è vera: vedi sopra.*
4. *f è limitata in R^2. Questa risposta è falsa:* $\lim_{n\to\infty} f(n,0) = \lim_{n\to\infty}(n-1)^2 = +\infty$.

Esercizio (5)

Sia $E = \{(x, y) \in R^2 : -\sqrt{4 - x^2} < y \leq x^2 - 1\}$. *Quale delle seguenti risposte è* **falsa***?*

1. *E non è convesso.*
2. *E non ha punti isolati.*
3. *E non contiene tutti i suoi punti di frontiera.*
4. *Tutti i punti di E sono punti interni.*

Soluzione (5)



1. *E non è convesso. Questa risposta è vera: presi i due punti* $(-1,0)$ *e* $(1,0)$*, il segmento che li congiunge non è contenuto in* E*.*
2. *E non ha punti isolati.Questa risposta è vera: l'insieme è l'interno delle curve disegnate sopra.*
3. *E non contiene tutti i suoi punti di frontiera. Questa risposta è vera:* $(0,-2) \in \partial E$ *ma* $(0,-2) \notin E$*.*
4. *Tutti i punti di E sono punti interni. Questa risposta è falsa:* $(0,-1) \in \partial T \cap T$*.*

Esercizio (6)

L'equazione differenziale $y'''(x) - y'(x) = 1 - 2x$ *è verificata da:*

1. $c\,\mathrm{e}^{-x} + 1/3$, $c \in R$.
2. $c\,\mathrm{e}^{x} + d\,\mathrm{e}^{-x} - x$, $c, d \in R$.
3. $c + x^2 - x$, $c \in R$.
4. $\mathrm{e}^{x} + x^2$.

Soluzione (6)

L'omogenea associata ha come equazione caratteristica $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ *da cui si ottiene*

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1\ \&\ \lambda_3 = 1 \Longrightarrow 1,\ \mathrm{e}^{x} \&\ \mathrm{e}^{-x}$$

e quindi l'integrale generale dell'omogenea è $y_o(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-x}$, *al variare di* $c_1,\ c_2,\ c_3 \in R$. *Una soluzione particolare* y_p *si cerca del tipo* $v(x) = (ax + b)x$. *Imponendo che* v *sia soluzione dell'equazione completa si trova*

$$-2ax - b = 1 - 2x \Longrightarrow y_p(x) = x^2 - x,$$

e quindi l'integrale generale sarà

$$y_g(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x, \quad \forall c_1,\ c_2,\ c_3 \in R.$$

1. $c\,\mathrm{e}^{-x} + 1/3,\ c \in R$. *Questa risposta è falsa:* $x^2 - x$ *non compare.*
2. $c\,\mathrm{e}^{x} + d\,\mathrm{e}^{-x} - x,\ c, d \in R$. *Questa risposta è falsa:* x^2 *non compare.*
3. $c + x^2 - x,\ c \in R$. *Questa risposta è vera: basta che nell'integrale generale si ponga* $c_1 = c$ *e* $c_2 = c_3 = 0$.
4. $\mathrm{e}^{x} + x^2$. *Questa risposta è falsa:* $-x$ *non compare.*

Esercizio (7)

Si consideri l'integrale doppio

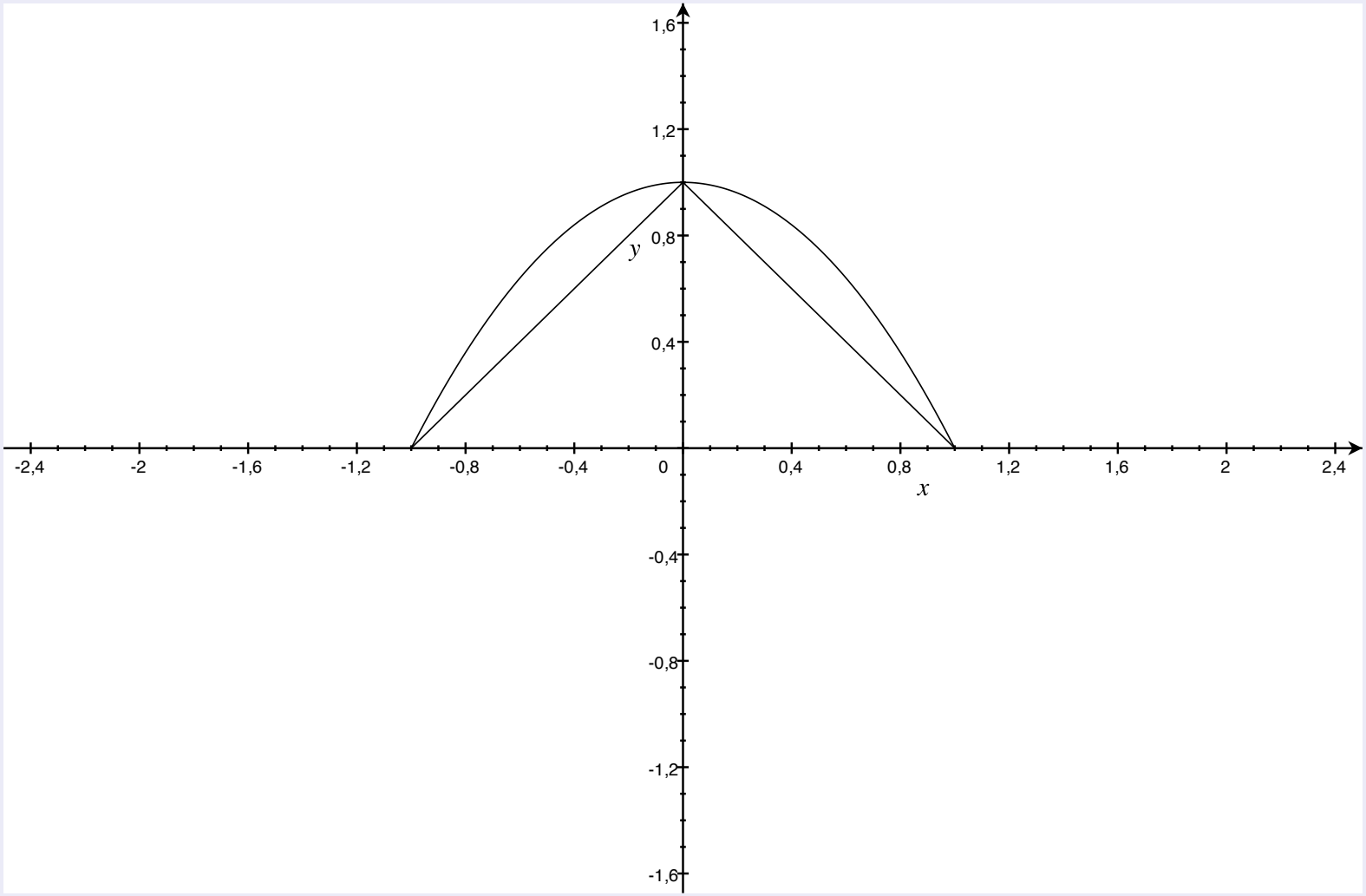
$$I(f) = \int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{y-1} f(x,y)\,dx \right) + \int_0^1 dy \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx \right).$$

Quale tra le seguenti affermazioni è **falsa***?*

1. $I(f) = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{1-|x|}^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right).$
2. *Il dominio D è normale rispetto all'asse x.*
3. $I(f) = 2\int_{-1}^{0} dx \left(\int_{1+x}^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right).$
4. $I(f) = 0$ *quando* $f(x,y) = x.$

Soluzione (7)

Il dominio D è delimitato dalle curve $x^2 = 1 - y$ e $|x| = 1 - y$, $y \in [0, 1]$.



Il dominio D è quindi normale rispetto all'asse x, e si ha

$$D = \{(x, y) \in R^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ 1 - |x| \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Soluzione (7)

1. $I(f) = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{1-|x|}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right)$. *Questa risposta è vera: si veda la rappresentazione di D come dominio normale ripetto all'asse x.*
2. *Il dominio D è normale rispetto all'asse x. Questa risposta è vera: si veda sopra.*
3. $I(f) = 2 \int_{-1}^{0} dx \left(\int_{1+x}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right)$. *Questa risposta è falsa: si prenda*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Si trova che $I(f) > 0$, mentre $I(f) = 2 \int_{-1}^{0} dx \left(\int_{1+x}^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right) = 0.$

4. $I(f) = 0$ *quando* $f(x,y) = x$. *Questa risposta è vera: segue dal fatto che l'asse y è di simmetria per l'insieme D, dunque l'ascissa del baricentro deve cadere su $x = 0$ e quindi l'integrale $I(x) = 0$.*

Esercizio (8)

Si consideri l'insieme $V = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2, \ x > 0\}$, *e sia* $I = \int_V x \, dxdydz$. *Allora*

1. $I = 8/15$.
2. $I = 0$.
3. $I = 37\pi/15$.
4. *nessuna delle altre risposte è vera.*

Soluzione (8)

L'insieme è delimitato dai paraboloidi $z = 3x^2 + 3y^2$ *(sotto) e* $z = 2 + x^2 + y^2$ *(sopra) e contenuto nel semispazio* $x > 0$. *Conviene integrare per fili, e a tal fine calcoliamo* $\Pi_{x,y}(V)$ *osservando che*

$$\begin{cases} z = 3x^2 + 3y^2 \\ z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 3x^2 + 3y^2 \\ 3x^2 + 3y^2 = 2 + x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 3x^2 + 3y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e dunque $\Pi_{x,y}(V) = \{(x, y) \in R^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\ x > 0\}$. *Operando il cambio di variabile* $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$*si ottiene* $\Phi^{-1}(\Pi_{x,y}(V)) = \{(\rho, \theta) \,:\, \rho \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned} \int_V x\, dxdydz &= \int_{\Pi_{x,y}(V)} x\, dxdy \left(\int_{3x^2+3y^2}^{2+x^2+y^2} dz \right) \\ &= \int_{\Pi_{x,y}(V)} 2x(1 - x^2 - y^2)\, dxdy \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Pi_{x,y}(V))} 2\rho\cos\theta(1 - \rho^2)\rho\, d\rho d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\theta d\theta \left(\int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)\, d\rho \right) \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Soluzione (8)

1. $I = 8/15$. *Questa risposta è vera.*
2. $I = 0$. *Questa risposta è falsa.*
3. $I = 37\pi/15$. *Questa risposta è falsa.*
4. *nessuna delle altre risposte è vera. Questa risposta è falsa.*