# Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 21 maggio 2009

May 12, 2009

## Esercizio (1)

*Dati gli insiemi*

- $A = \{(x, y) \in R^2 \ : \ -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$
- $B = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0\}$,

*sia* $(x_\Omega, y_\Omega)$ *il baricentro geometrico di* $\Omega = A \setminus B$.

(i) $(x_\Omega, y_\Omega) = \left(\frac{2}{3\pi}, 0\right)$.

(ii) $(x_\Omega, y_\Omega) = \left(\frac{-4}{3(8-\pi)}, 0\right)$.

(iii) $(x_\Omega, y_\Omega) \in A \cap B$.

(iv) *nessuna delle altre risposte è vera.*

# Soluzione Esercizio 1

## Soluzione (Esercizio 1)

*La risposta corretta è la (ii), infatti:*

- *Il baricentro di* $A$ *si trova in* $(x_A, y_A) = (0, 0)$
- *Il baricentro di* $B$ *si trova in* $(x_B, y_B) = (4/3\pi,\ 0)$. *Che* $y_B = 0$ *è chiaro per motivi di simmetria, mentre per quanto riguarda* $x_B$ *si ha che*

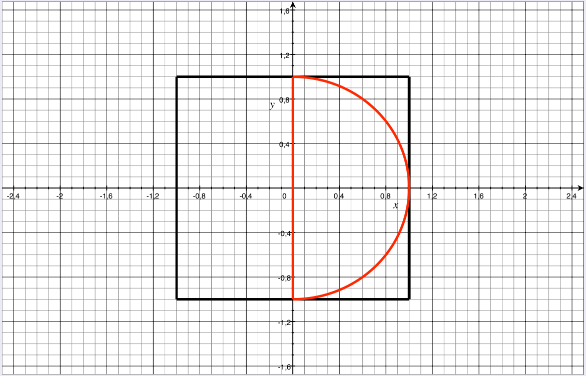
$$\begin{aligned} m(B) &= \frac{\pi}{2} \\ \int_B x\, dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left( \int_0^1 (\rho\cos\theta)\rho\, d\rho \right) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \left( \int_0^1 \rho^2\, d\rho \right) \\ &= [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

# Soluzione Esercizio 2

## Soluzione (Esercizio 1..continua..)

- *il baricentro di $\Omega = A \setminus B$ si trova in*

$$\begin{cases} x_\Omega = \dfrac{m(A)x_A - m(B)x_B}{m(A) - m(B)} = \dfrac{-4}{3(8-\pi)}, \\ y_\Omega = \dfrac{m(A)y_A - m(B)y_B}{m(A) - m(B)} = 0, \end{cases}$$



## Esercizio (2)

*Dato l'insieme* $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ 0 \leq 4z \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,

1. *calcolate*
$$\int_{\Omega} (x + y + z) \, dxdydz.$$
2. *calcolate le coordinate del baricentro di* $\Omega$

# Soluzione Esercizio 2

## Soluzione (Esercizio 2)

1. $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{4}\}$, *e quindi integrando per fili si ottiene*

$$\int_\Omega (x + y + z)\, dxdydz = \int_B dxdy \left( \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} z\, dz \right) = \ldots = \frac{2\pi}{3}$$

*dove* $B = \{(x, y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ *è la proiezione dell'insieme sul piano* $z = 0$. *Si osservi che il baricentro geometrico di* $\Omega$ *giace sull'asse* $z$ *(è asse di simmetria per l'insieme* $\Omega$*). Ne segue che* $x_\Omega = y_\Omega = 0$ *(le prime due coordinate del baricentro geometrico sono nulle) e dunque possiamo concludere che* $\int_\Omega x\, dxdydz = \int_\Omega y\, dxdydz = 0$

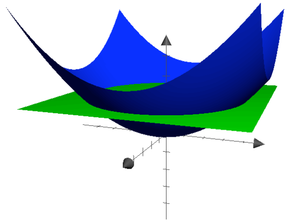
2. *Per calcolare il baricentro è necessario calcolare* $m(\Omega)$, *ovvero*

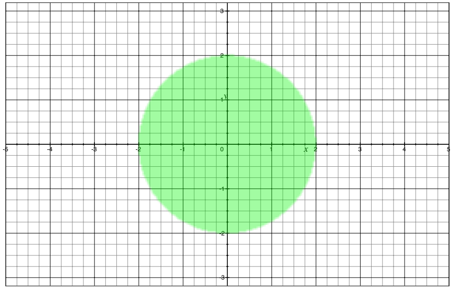
$$\int_\Omega dxdydz = \int_B dxdy \left( \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dz \right) = \int_B \frac{x^2 + y^2}{4}\, dxdy = \ldots = 2\pi$$

*e quindi* $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) = (0, 0, 1/3)$.

## Soluzione Esercizio 2

### Soluzione (Esercizio 2)





## Esercizio (3)

*Calcolate, utilizzando il teorema del cambiamento di variabili, il seguente integrale*

$$\int_{\Omega} \frac{2y^2}{\mathrm{e}^x} \cos\left(y\mathrm{e}^x\right) dxdy$$

*dove* $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \ : \ \mathrm{e}^x \leq y \leq 2\mathrm{e}^x, \ \frac{\pi}{2} \leq y\mathrm{e}^x \leq \pi\}$

# Soluzione esercizio 3

## Soluzione (Esercizio 3)

*La corretta trasformazione è* $(u, v) = (ye^{-x}, ye^{x})$, *ovvero*

$$(u, v) \to \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{v}{u}\right), \sqrt{uv}\right).$$

*Con qualche calcolo si ottiene che*

$$|\det J_{\Phi}(u, v)| = \left|-\frac{1}{2\sqrt{uv}}\right|, \qquad \Phi^{-1}(\Omega) = [1, 2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

*e quindi*

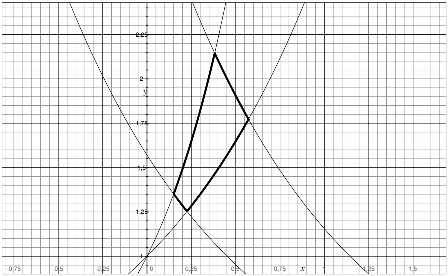
$$\int_{\Omega} \frac{2y^2}{e^x} \cos(ye^x)\, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} (2\sqrt{uv}) \cdot u\cos(v) \cdot \frac{1}{2\sqrt{uv}} dudv.$$

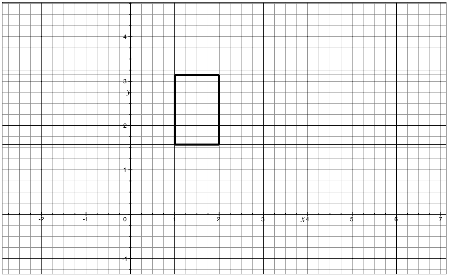
*Essendo* $\Phi^{-1}(\Omega)$ *un rettangolo, si ha*

$$\int_1^2 du \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u\cos(v) dv\right) = -\frac{3}{2}$$

# Soluzione esercizio 3

## Soluzione (Esercizio 3)



## Esercizio (4)

*Si consideri l'integrale doppio* $I = \int_{\pi/4}^{2\pi/3} d\theta \left( \int_0^{2/\sin\theta} \rho^2 \, d\rho \right)$. *Quale tra le seguenti affermazioni è* **vera**?

1. $I = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{0} dx \left( \int_{-\sqrt{3}x}^{2} dy \right) + \int_0^2 dx \left( \int_x^2 dy \right)$.
2. $I = \int_0^2 dy \left( \int_{-\frac{y}{\sqrt{3}}}^{y} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \right)$.
3. $I = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} dx \left( \int_{-\sqrt{3}x}^{x} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \right)$.
4. $I = \int_0^{\sqrt{3}} dy \left( \int_{-\frac{y}{2}}^{y} (x^2+y^2) \, dx \right)$.

# Soluzione esercizio 4

## Soluzione (Esercizio 4)

*Il dominio d'integrazione in coordinate polari è l'insieme*

$$E = \{(\rho,\theta) \,:\, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3},\, 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin\theta}\}$$

*e quindi le curve che delimitano l'insieme sono* $\theta = \pi/4$, $\theta = 2\pi/3$, $\rho = 2/\sin\theta$ *e* $\rho = 0$ *(quest'ultimo è un solo punto, l'origine).*
*Dunque le curve sono (si ricordi che* $\rho\sin\theta = y$*)*

$$y = x, \qquad y = -\sqrt{3}x, \qquad y = 2$$

*e quindi il dominio, nel piano* $x, y$*, è un triangolo avente coordinate* $(0,0)$, $(2,2)$ *e* $(-2/\sqrt{3}, 2)$ *che è normale rispetto all'asse* $y$ *e si scrive come*

$$\Theta(E) = \{(x,y) \,:\, 0 \leq y \leq 2,\, -y/\sqrt{3} \leq x \leq y\}$$

*e quindi la risposta esatta è la (ii), essendo*

$$\int_0^2 dy \left( \int_{-\frac{y}{\sqrt{3}}}^{y} \sqrt{x^2+y^2}\, dx \right) = \int_{\pi/4}^{2\pi/3} d\theta \left( \int_0^{2/\sin\theta} \rho^2\, d\rho \right).$$