Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 14 maggio 2009

May 12, 2009

Esercizio (1)

Determinate il valore del seguente integrale doppio

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$

dove $f(x,y) = x$*, ed* Ω *è l'insieme delimitato dalle curve*

- $y = \mathrm{e}^x$
- $y = \frac{(\mathrm{e}^2-1)(x-1)}{2\mathrm{e}} + \mathrm{e}.$

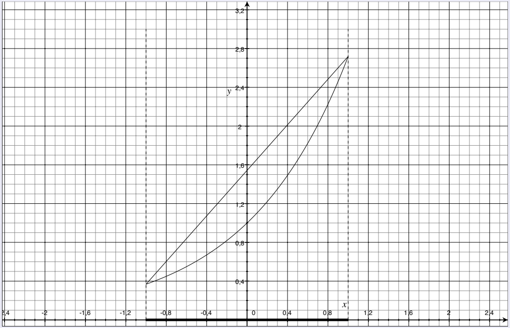
Soluzione esercizio 1

Soluzione (Esercizio 1)

- *Il dominio Ω è normale rispetto all'asse x (anche rispetto all'asse y) e quindi lo si può esprimere come*

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ \mathrm{e}^x \leq y \leq \frac{(\mathrm{e}^2 - 1)(x - 1)}{2\mathrm{e}} x + \mathrm{e}\}$$

- $\displaystyle\int_\Omega x \, dxdy = \frac{\mathrm{e}^2 - 7}{3\mathrm{e}}.$



Esercizio (2)

Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in R^2 \ : \ \frac{y^2}{4} \leq x \leq \frac{y}{2}\}$*, l'integrale* $\int_E (y - y^3)\, dxdy$

(i) *è uguale a* 0.

(ii) *è uguale a* $\frac{2}{5}$.

(iii) *è uguale a* $-\frac{1}{5}$.

(iv) *non esiste poiché E è illimitato.*

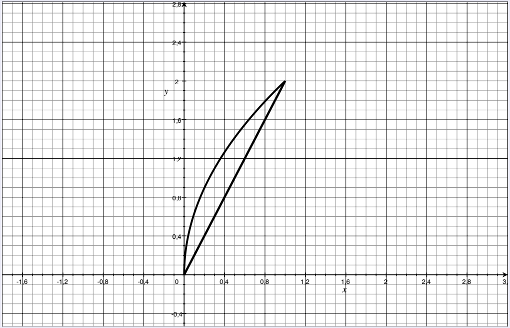
Soluzione Esercizio 2

Soluzione (Esercizio 2)

L'insieme è un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y)\,:\,0 \le x \le 1,\, 2x \le y \le 2\sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y)\,:\,0 \le y \le 2,\, \tfrac{y^2}{4} \le x \le \tfrac{y}{2}\} \end{aligned}$$

La risposta corretta è la (iii), *ovvero* $-1/5$.
Si può osservare, senza fare calcoli, che l'insieme E *è limitato e dunque la (iv) è falsa.*



Soluzione Esercizio 2

Soluzione (Esercizio 2..continua...)

Per avere la risposta, si procede

$$\begin{aligned}
\int_E (y-y^3)\,dxdy &= \int_0^2 dy \left(\int_{y^2/4}^{y/2} (y-y^3)dx \right) \\
&= \int_0^2 (y-y^3)\left[\frac{y}{2}-\frac{y^2}{4}\right] dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(2y^2-y^3-2y^4+y^5\right) dy \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Esercizio (3)

Negli integrali che seguono f è continua sull'insieme misurabile S. Determinare in ciascun caso quali curve delimitano S, scrivere in forma esplicita S come dominio normale o come unione di domini normali e invertire l'ordine di integrazione.

1. $$\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \left(\int_{2-2y}^{2} f(x,y)\,dx \right)$$
2. $$\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \left(\int_{x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right)$$

Soluzione Esercizio 3

Soluzione (Esercizio 3)

1. *Le curve in questo caso sono* $x = 2$, $y = 1$ *e* $y = 1 - x/2$. *Inoltre*

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 1 - x/2 \le y \le 1\} \\ &= \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 2 - 2y \le x \le 1\} \end{aligned}$$

e infine

$$\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \left(\int_{2-2y}^2 f(x,y)\,dx \right) = \int_0^2 dx \left(\int_{1-x/2}^1 f(x,y)\,dy \right)$$

2. *Le curve in questo caso sono* $x = 1$, $y = x$ *e* $y = 2\sqrt{x}$. *Inoltre*

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2\sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ y^2/4 \le x \le y\} \cup \{(x,y) : 1 \le y \le 2,\ y^2/4 \le x \le 1\} \end{aligned}$$

e infine

$$\int_0^1 dx \left(\int_x^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) = \int_0^1 dy \left(\int_{y^2/4}^y f(x,y)\,dx \right) + \int_1^2 dy \left(\int_{y^2/4}^1 f(x,y)\,dx \right)$$

Esercizio (4)

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

quando $E = \left\{(x,y) \in R^2 :\ 1 \le x \le 2,\ \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\right\}.$

Soluzione Esercizio 4

Soluzione (Esercizio 4)

E è un insieme limitato. Inoltre E è un dominio normale rispetto all'asse x, e quindi misurabile. La funzione f è continua su E, e per il Teorema di riduzione si ha

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_1^2 dx\left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\,dy\right)\\
&= \int_1^2 \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=x^2} dx\\
&= \int_1^2 \left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx\\
&= \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - x\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(x^2+4\right)\right]_{x=1}^{x=2}\\
&= 2\arctan(2) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\log(5) + \frac{7}{2}\log(2) - 3\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$