Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 7 maggio 2009

May 5, 2009

Esercizio (1)

a) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' + y = \cos x + 2\sin x.$$

b) *Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y & = & \cos x + 2\sin x \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{cases}$$

Soluzione (Esercizio 1)

a) *ODE lineare del 2 ordine a coefficienti costanti. Polinomio caratteristico eq. omogenea associata è* $\lambda^2 + 1 = 0$.

$$\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i \longmapsto y_1 = \sin x, \ y_2 = \cos x.$$

L'omogenea associata ha integrale generale

$$y_o(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

quando $c_1, c_2 \in R$.
Una soluzione particolare va cercata del tipo $v(x) = x(a\cos x + b \sin x)$, *e quindi si trova*

$$y_p(x) = -x\cos x + \frac{x}{2} \sin x.$$

L'integrale generale è dato da $y_g = y_o + y_p$.

b) $y(x) = \sin x - x\cos x + \frac{x}{2}\sin x$.

Esercizio (2)

a) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x + e^x.$$

b) *Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' - 9y' = x^2 + \cos(3x).$$

Soluzione (Esercizio 2)

a) *Il polinomio caratteristico è* $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1) = 0$. *Quindi*

$$\lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i,\ \lambda_3 = -1 \longmapsto y_1 = \sin(2x),\ y_2 = \cos(2x),\ y_3 = e^{-x}.$$

L'integrale generale dell'omogenea è dato da

$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3 \in R.$$

Imponendo che $v(x) = ax + b$ *sia soluzione di* $y''' + y'' + 4y' + 4y = x$, *troviamo* $y_{p,1}(x) = \frac{1}{4}(x - 1)$.
Imponendo che $v(x) = ke^x$ *sia soluzione di* $y''' + y'' + 4y' + 4y = e^x$, *troviamo* $y_{p,2}(x) = \frac{1}{10}e^x$. *L'integrale generale cercato è dunque*

$$y_g = y_o + y_{p,1} + y_{p,2}.$$

b) *L'integrale generale dell'omogenea è dato da*

$$y_o(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in R.$$

Imponendo che $v(x) = (ax^2 + bx + c)x$ *sia soluzione di* $y''' - 9y' = x^2$, *troviamo* $y_{p,1}(x) = -\frac{1}{81}(3x^3 + 2x)$.
Imponendo che $v(x) = a\sin(3x) + b\cos(3x)$ *sia soluzione di* $y''' - 9y' = \cos(3x)$, *troviamo* $y_{p,2}(x) = -\frac{1}{54}\sin(3x)$. *L'integrale generale cercato è dunque*

$$y_g = y_o + y_{p,1} + y_{p,2}.$$

Esercizio (3)

La funzione $f(x) = xe^x + x^2 + x$ *è soluzione dell'equazione differenziale*

1. $y'' - 2y' + y = x^2 - 3x$. **(Vero o Falso?)**
2. $y'' + 2y' + y = x^2 - x$. **(Vero o Falso?)**
3. $y''' - 2y'' + y' = 2x - 3$. **(Vero o Falso?)**
4. $y'' - y = x^2 - 3x$. **(Vero o Falso?)**
5. $y' = y + x^2 - x$. **(Vero o Falso?)**

Soluzione (Esercizio 3)

1. **VERO**
2. **falso**
3. **VERO**
4. **falso**
5. **falso**

Esercizio (4)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) + ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

La funzione $e^{2x} + e^{-x} + 1$ *è soluzione dell'equazione differenziale quando*

1. $a = 1, b = -2$ *e* c *qualsiasi.* **(Vero o Falso?)**
2. $a = -1, b = -2$ *e* $c = 0$. **(Vero o Falso?)**
3. $a = 1, b = 0$ *e* $c = -2$. **(Vero o Falso?)**
4. $a = 0, b = -4$ *e* $c = 0$. **(Vero o Falso?)**

Soluzione (Esercizio 4)

1. **falso**
2. **VERO**
3. **falso**
4. **falso**