

Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 23 aprile 2009

April 27, 2009

Esercizio (1)

Considerate la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

- a) *Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.*
- b) *Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \geq y \geq -\sqrt{4 - x^2}\}$$

Suggerimento

Per il punto b), conviene

- *parametrizzare la frontiera $\partial A = C_1 \cup C_2$, con $C_1 = \{\varphi(t) : a \leq t \leq b\}$ e $C_2 = \{\gamma(t) : c \leq t \leq d\}$;*
- *studiare $f(\varphi(t))$ quando $t \in [a, b]$ e determinarne massimi e minimi*
- *studiare $f(\gamma(t))$ quando $t \in [c, d]$ e determinarne massimi e minimi*
- *confrontare i massimi sulla frontiera con i massimi locali interni e determinare il più grande tra questi*
- *analogamente si procede per il minimo*

Soluzione Esercizio 1

Soluzione (Esercizio 1)

- (i) *L'unico punto stazionario è $(0, 1)$, che è un minimo relativo interno, infatti*

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo poi $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 \geq f(0, 1) = 0$, questo è pure punto di minimo assoluto della funzione su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) *Si osservi che il punto $(0, 1) \notin A$. La frontiera $\partial A = C_1 \cup C_2$ è unione di due curve regolari di parametrizzazione*

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\varphi(t) = (-t, 0) : t \in [-2, 2]\} \\ C_2 &= \{\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) : t \in [\pi, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Studiando $g(t) = f(\varphi(t)) = t^2 + 1$ quando $t \in [-2, 2]$, si trova $t = 0$, punto di minimo per g su $[-2, 2]$, ovvero $(0, 0) = \varphi(0)$.

Studiando successivamente $h(t) = f(\gamma(t)) = 5 - 4 \sin t$ al variare di $t \in [\pi, 2\pi]$, si trova $t = 3\pi/2$ punto di massimo per h su $[\pi, 2\pi]$, ovvero $\gamma(3\pi/2) = (0, -2)$.

Esercizio (2)

Considerate la funzione

$$f(x, y) = y - x^2.$$

- a) *Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y| \leq 2\}$$

- b) *Se il punto P_M (P_m) di massimo (minimo) di f su A cade su ∂A e se in questo punto la frontiera ammette una parametrizzazione regolare $\varphi(t)$, cosa si può dire del prodotto scalare $\langle \nabla f(P_M), \varphi'(t_M) \rangle$ dove $\varphi(t_M) = P_M$ (ovvero del prodotto $\langle \nabla f(P_m), \varphi'(t_m) \rangle$ dove $\varphi(t_m) = P_m$)?*

Soluzione Esercizio 2

Soluzione (Esercizio 2)

- (i) $\nabla f(x, y) = (1, -2x) \neq (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e quindi non esistono punti stazionari interni all'insieme A
- (ii) Il massimo di f è raggiunto in $(0, 2)$, e si ha

$$M = f(0, 2) = 2 = \max_{\partial A} f = \max_A f,$$

mentre il minimo è raggiunto in $(-2, -2)$ e $(-2, 2)$, e si trova

$$m = f(-2, -2) = -6 = \min_{\partial A} f = \min_A f.$$

- (iii) Nel caso del massimo, si trova che il prodotto scalare è nullo. Nel caso del minimo non si può concludere nulla in quanto non esiste univocamente determinato il vettore tangente alla frontiera nei punti $(-2, -2)$ e $(-2, 2)$.

Esercizio (3)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 4x^2 + 4y + 5$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 Determinare gli eventuali punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne la natura.
- 2 Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluti di f nell'insieme $E = [0, 2] \times [-2, 0]$.

Soluzione Esercizio 3

Soluzione (Esercizio 3)

- ❶ *I punti stazionari di f su $\mathbb{R}^2$ sono $A_1 = (0, -1)$, $A_2 = (-\sqrt{2}, -1)$ e $A_3 = (\sqrt{2}, -1)$. Si ha*

$$H_f(A_1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_f(A_2) = H_f(A_3) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi

- ▶ A_1 è un punto di sella,
 - ▶ A_2 e A_3 sono punti di minimo relativo interno e $f(A_2) = f(A_3) = -1$
- ❷ *L'insieme E è un rettangolo con vertici nei punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, -2)$ e $(0, -2)$. Poiché E è chiuso e limitato e f è continua su E , il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette massimo e minimo assoluti in E . Il bordo di E può essere parametrizzato attraverso le curve*

- ▶ $\varphi_1(t) = (t, 0)$, per ogni $t \in [0, 2]$
- ▶ $\varphi_2(t) = (2, t)$ per ogni $t \in [-2, 0]$,
- ▶ $\varphi_3(t) = (t, -2)$, per ogni $t \in [0, 2]$
- ▶ $\varphi_4(t) = (0, t)$ per ogni $t \in [-2, 0]$,

Studiando le funzioni $f \circ \varphi_j$ ($j = 1, \dots, 4$) si ottiene che

$\min_{\partial E} f = f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, -2) = 1$ e

$\max_{\partial E} f = f(0, 0) = f(0, -2) = f(2, -2) = f(2, 0) = 5$. Si conclude che

$\min_E f = f(A_2) = f(A_3) = -1$ e $\max_E f = 5$.

Esercizio (4)

Data la funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y)y$, determinare

- 1 i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e la loro natura;
- 2 il massimo ed il minimo assoluti di f nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}.$$

Soluzione Esercizio 4

Soluzione (Esercizio 4)

- ① I punti stazionari della funzione f su $\mathbb{R}^2$ sono: $A = (0, 0)$ e $B = (0, \frac{4}{3})$. Si ha

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_f(B) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- ▶ la natura del punto A non si ottiene dallo studio dell'Hessiana,
- ▶ il punto B è di minimo relativo interno e $f(B) = -\frac{32}{27}$.

Valutiamo il segno di $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y)$ intorno a $(0, 0)$. Poiché $f(x, x^3) = x^5 - 2x^6 + x^9$ cambia segno in un intorno di $x = 0$, $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo per f .

- ② E è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(-2, 2)$. Il bordo di E si può parametrizzare con
- ▶ $\varphi_1(t) = (t, 2)$ per ogni $t \in [-2, 2]$,
 - ▶ $\varphi_2(t) = (-t, t)$ per ogni $t \in [0, 2]$,
 - ▶ $\varphi(t) = (t, t)$ per ogni $t \in [0, 2]$.

Si trova che la restrizione di f a ∂E ha massimo assoluto $8 = f(2, 2) = f(-2, 2)$ e minimo assoluto $-\frac{8}{27} = f(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Essendo $-\frac{8}{27} > -\frac{32}{27}$, si conclude che

$$\max_E f = \max_{\partial E} f = 8 \quad \min_E f = \min_{E \setminus \partial E} f = -\frac{32}{27}.$$