Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 16 aprile 2009

April 8, 2009

Esercizio (1)

Data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy - 4$,

(i) *Calcolate, se esiste,* $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f$*; nel caso non esista, motivare perchè.*

(ii) *Calcolare* ∇f*, il gradiente di* f*.*

(iii) *Calcolare la derivata direzionale di* f *nel punto* $(-1,1)$ *rispetto alla direzione* $(-1/2, \sqrt{3}/2)$.

(iv) *Calcolare l'equazione del piano tangente a* f *nel punto* $(-1, 1, f(-1,1))$.

Soluzione Esercizio 1

Soluzione (Esercizio 1)

(i) *Il limite non esiste: infatti, preso l'asse delle ascisse, che ha come rappresentazione parametrica* $\varphi(t,t) = (t,0)$, *si ha che* $f(\varphi(t)) = t^3 - 4$ *e quindi*

$$\lim_{t \to -\infty} f(\varphi(t)) = -\infty, \quad \textit{mentre} \quad \lim_{t \to +\infty} f(\varphi(t)) = +\infty.$$

che sono diversi tra loro.

(ii) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y,\, 3y^2 + 3x)$.

(iii) $\nabla f(-1,1) = (6,0)$, *e quindi*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,1) = \left\langle (6,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = -3.$$

(iv) $z = 6x - 1$.

Esercizio (2)

Considerate la funzione $f(x, y) = xy(2x + 4y + 1)$.

a) *Determinate gli eventuali punti stazionari di* f *in* R^2 *e studiatene la natura.*

a) *Determinate estremo superiore e inferiore di* f *in* R^2, *e stabilite se sono massimo o minimo rispettivamente.*

Soluzione Esercizio 2

Soluzione (Esercizio 2)

(i) $\nabla f_((x,y) = (y(4x+4y+1), x(2x+8y+1))$, $(x,y) \in R^2$; *La matrice hessiana è data da*

$$\begin{pmatrix} 4y & 4x+8y+1 \\ 4x+8y+1 & 8x \end{pmatrix}.$$

I punti stazionari sono dunque $A = (0,0)$, $B = (-1/2, 0)$, $C = (0, -1/4)$ *e* $D = (-1/6, -1/12)$ *e sono tutti punti di sella.*

(ii) $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ *infatti*

-
- $f(x_n, y_n) = f(n, 1/2) = \frac{n}{2}(2n+3) \to +\infty$ *quando* $n \to +\infty$
-
- $f(\widehat{x}_n, \widehat{y}_n) = f(n, -1/2) = -\frac{n}{2}(2n-1) \to -\infty$ *quando* $n \to +\infty$

Esercizio (3)

Considerate la funzione $f(x, y) = x^2 - 2xy^3 + 3y^2 + 1$.

a) *Determinate gli eventuali punti stazionari di* f *in* R^2 *e studiatene la natura.*

b) *Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate il massimo e il minimo assoluti di* f *sul quadrato* T *di vertici* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ *e* $(0, 1)$.

suggerimento:

- *si parametrizzi il segmento che congiunge* $(0, 0)$ *con* $(1, 0)$, *e sia* $\varphi(t)$ *la parametrizzazione,* $\varphi : [a, b] \to R^2$.
- *si consideri la funzione* $g_1(t) = f(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$, *e si determinino il massimo ed il minimo di* $g_1(t)$ *su* $[a, b]$.
- *si parametrizzi il segmento che congiunge* $(1, 0)$ *con* $(1, 1)$, *e sia* $\phi(t)$ *la parametrizzazione,* $\phi : [c, d] \to R^2$.
- *si consideri la funzione* $g_2(t) = f(\phi(t))$, $t \in [c, d]$, *e si determinino il massimo ed il minimo di* $g_2(t)$ *su* $[c, d]$.
- *si parametrizzi il segmento che congiunge* $(1, 1)$ *con* $(0, 1)$...
- *Una volta calcolato il minimo su ciascun tratto, si prende il più piccolo tra questi e lo si confronta con il minimo locale interno(eventuale) e quindi si prenda il più piccolo tra questi: ecco trovato il minimo assoluto.*
- *Analogamente si procede per il massimo.*

Soluzione Esercizio 3

Soluzione (Esercizio 3)

(i) $\nabla f(x,y) = \left(2x - 2y^3, \, -6xy^2 + 6y\right)$, $(x,y) \in R^2$; *La matrice hessiana è data da*

$$\begin{pmatrix} 2 & -6y^2 \\ -6y^2 & 6 - 12xy \end{pmatrix}.$$

I punti stazionari sono dunque $A = (0,0)$ *(punto di minimo locale),* $B = (1,1)$ *e* $C = (-1 - 1)$ *(punti di sella)*

(ii) $\max_{(x,y)\in A} f = \max_{(x,y)\in \partial A} f = f(0,1) = 4$
$\min_{(x,y)\in A} f = \min_{(x,y)\in \partial A} f = f(0,0) = 1.$

Esercizio (4)

Considerate la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}.$$

a) *Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.*

b)
$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = +\infty.$$
(vero o falso?)

c) *La funzione è limitata inferiormente. (vero o falso?)*

Soluzione Esercizio 4

Soluzione (Esercizio 4)

a) $(0,0)$ *(punto di sella) e* $(-4,-2)$ *(punto di massimo relativo interno).*

b) *Falso. Infatti, presa* $\varphi(t) = (0,t)$, *si ha che*
$\lim_{t\to+\infty} f(\varphi(t)) = 0$,
mentre
$\lim_{t\to-\infty} f(\varphi(t)) = -\infty$.

c) *Falso. Posto* $\gamma(t) = (t,0)$, *si ha che*
$\lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = +\infty$, *e quindi (si veda il punto b)!) la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.*

Esercizio (5)

Considerate la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

a) *Determinate i punti stazionari di f studiandone la natura.*

b) *Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme*

$$A = \{(x,y) \in R^2 \ : \ 0 \geq y \geq -\sqrt{4 - x^2}\}$$

Suggerimento

Per il punto b), conviene

- *parametrizzare la frontiera $\partial A = C_1 \cup C_2$, con $C_1 = \{\varphi(t) \ : \ a \leq t \leq b\}$ e $C_2 = \{\gamma(t) \ : \ c \leq t \leq d\}$;*
- *studiare $f(\varphi(t))$ quando $t \in [a,b]$ e determinarne massimi e minimi*
- *studiare $f(\gamma(t))$ quando $t \in [c,d]$ e determinarne massimi e minimi*
- *confrontare i massimi sulla frontiera con i massimi locali interni e determinare il più grande tra questi*
- *analogamente si procede per il minimo*

Soluzione Esercizio 5

Soluzione (Esercizio 5)

(i) *L'unico punto stazionario è* $(0,1)$, *che è un minimo relativo interno, infatti*

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo poi $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \geq f(0,1) = 0$, *questo è pure punto di minimo assoluto della funzione su* R^2.

(ii) *Si osservi che il punto* $(0,1) \notin A$. *La frontiera* $\partial A = C_1 \cup C_2$ *è unione di due curve regolari di parametrizzazione*

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\varphi(t) = (-t, 0) \;:\; t \in [-2,2]\} \\ C_2 &= \{\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t) \;:\; t \in [\pi, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

Studiando $g(t) = f(\varphi(t)) = t^2 + 1$ *quando* $t \in [-2,2]$, *si trova* $t = 0$, *punto di minimo per* g *su* $[-2,2]$, *ovvero* $(0,0) = \varphi(0)$.
Studiando successivamente $h(t) = f(\gamma(t)) = 5 - 4\sin t$ *al variare di* $t \in [\pi, 2\pi]$, *si trova* $t = 3\pi/2$ *punto di massimo per* h *su* $[\pi, 2\pi]$, *ovvero* $\gamma(3\pi/2) = (0,-2)$.

Esercizio (6)

Considerate la funzione

$$f(x, y) = y - x^2.$$

a) *Determinate il massimo M ed il minimo m di f sull'insieme*

$$A = \{(x, y) \in R^2 \ : \ |x| \leq |y| \leq 2\}$$

b) *Se il punto P_M (P_m) di massimo (minimo) di f su A cade su ∂A e se in questo punto la frontiera ammette una parametrizzazione regolare $\varphi(t)$, cosa si può dire del prodotto scalare $\langle \nabla f(P_M), \varphi'(t_M) \rangle$ dove $\varphi(t_M) = P_M$ (ovvero del prodotto $\langle \nabla f(Pm), \varphi'(t_m) \rangle$ dove $\varphi(t_m) = P_m$)?*

Soluzione Esercizio 6

Soluzione (Esercizio 6)

(i) $\nabla f(x,y) = (1,-2x) \neq (0,0)$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$, *e quindi non esistono punti stazionari interni all'insieme* A

(ii) *Il massimo di* f *è raggiunto in* $(0,2)$, *e si ha*

$$M = f(0,2) = 2 = \max_{\partial A} f = \max_{A} f,$$

mentre il minimo è raggiunto in $(-2,-2)$ *e* $(-2,2)$, *e si trova*

$$m = f(-2,-2) = -6 = \min_{\partial A} f = \min_{A} f.$$

(iii) *Nel caso del massimo, si trova che il prodotto scalare è nullo. Nel caso del minimo non si può concludere nulla in quanto non esiste univocamente determinato il vettore tangente alla frontiera nei punti* $(-2,-2)$ *e* $(-2,2)$.