Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Esercitazione del 2 aprile 2009

April 1, 2009

Esercizio (1)

Sia data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2y^4}{1+x^4+y^2}$

(i) *Considerate le curve, al variare di* $t \in R$*,*

$$\varphi_1(t) = (0,t), \qquad \varphi_2(t) = (t,t), \qquad \varphi_3(t) = (3t, 4t^2),$$

$$\varphi_4(t) = (t, t^2), \qquad \varphi_5(t) = (t^2, t),$$

calcolate i limiti

$$\lim_{t\to\infty} f(\varphi_i(t)), \quad i = 1,2,3,4,5.$$

(ii) *Cosa si può dire del*

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)?$$

Soluzione (Esercizio 1)

(i) *Posto* $l_i = \lim_{t\to\infty} f(\varphi_i(t))$, *si ha che*

$$l_1 = 0,\ l_2 = +\infty,\ l_3 = +\infty,\ l_4 = +\infty \text{ e } l_5 = 1.$$

(ii) *Il limite di* f *non esiste poichè le restrizioni non hanno tutte lo stesso limite.*

Esercizio (2)

Sia dato l'insieme $\Omega =]-1,1] \times [0,1[$.

(i) $\mathcal{C}(\Omega) = (]-\infty,-1] \times R) \cup (]1,+\infty] \times R) \cup (]-1,1] \times [1,+\infty[) \cup (]-1,1] \times]-\infty,0[)$ *(vero o falso?)*

(ii) $\partial\mathcal{C}(\Omega) = ([-1,1] \times \{0\}) \cup ([-1,1] \times \{1\}) \cup (\{-1\} \times]0,1[) \cup (\{1\} \times]0,1[)$. *(vero o falso?)*

(iii) Ω *è chiuso. (vero o falso?)*

(iv) $\Omega \cup \partial\mathcal{C}(\Omega)$ *è chiuso. (vero o falso?)*

(v) $(1,1) \in \Omega$. *(vero o falso?)*

(vi) $(1,0)$ *è punto di accumulazione per* $\mathcal{C}(\Omega)$. *(vero o falso?)*

Soluzione (Esercizio 2)

(i) *Vero.*

(ii) *Vero.*

(iii) *Falso.*

(iv) *Vero* ($\partial\Omega = \partial\mathcal{C}\Omega$).

(v) *Falso.*

(vi) *Vero.*

Esercizio (3)

Siano dati gli insiemi

$$
\begin{aligned}
A_1(x,y) &= \{(x,y \in R^2) \ : \ y - x < 1\} \\
A_2(x,y) &= \{(x,y \in R^2) \ : \ y > 0\} \\
A_3(x,y) &= \{(x,y \in R^2) \ : \ x - 1 < 0\}.
\end{aligned}
$$

(i) *Rappresentare graficamente* $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

(ii) $\mathcal{C}A = \{(x,y \in R^2) \ : \ y - x \geq 1\} \cup \{(x,y \in R^2) \ : \ y \leq 0\} \cup \{(x,y \in R^2) \ : \ x \geq 1\}$. *(vero o falso?)*

(iii) $\partial\mathcal{C}A = \{(1,t) \in R^2 \ : \ t \in [0,2]\} \cup \{(t,0) \in R^2 \ : \ t \in [-1,1]\} \cup \{(t,t+1) \in R^2 \ : \ t \in [0,1]\}$. *(vero o falso?)*

(iv) *A è chiuso. (vero o falso?)*

(v) *A è aperto. (vero o falso?)*

Soluzione (Esercizio 3)

(i) *E' il triangolo di vertici* $(-1,0)$, $(1,0)$ *e* $(1,2)$.

(ii) *Vero.*

(iii) *Falso:*

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{C} A &= \{(1,t) \in R^2 \ : \ t \in [0,2]\} \cup \{(t,0) \in R^2 \ : \ t \in [-1,1]\} \\ &\cup \{(t,t+1) \in R^2 \ : \ t \in [-1,1]\} \end{aligned}$$

(iv) *Falso.*

(v) *Vero.*

Esercizio (4)

Sia data la funzione $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$.

(i) *Disegnate gli insiemi di livello della funzione, in particolare disegnate* $\{f = 0\}$, $\{f = -1\}$ *e* $\{f = 1\}$.

(ii) *Determinate il massimo ed il minimo (se esistono: giustificate la risposta!) della funzione* f *sull'insieme*

$$\Omega = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 - 2x \leq 1\}.$$

Soluzione (Esercizio 4)

(i) *Si ha che*

- $\{f = 0\} = \{(x, y) \ : \ x = 0\}$;
- $\{f = -1\} = \{(x, y) \ : \ x = -1 - y^2\}$;
- $\{f = 1\} = \{(x, y) \ : \ x = 1 + y^2\}$.

(ii) *Essendo* $\Omega = B(1, 0; \sqrt{2})$, *si ha che*

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2} &= f(1 + \sqrt{2}, 0) = \max_\Omega f(x, y) \\ 1 - \sqrt{2} &= f(1 - \sqrt{2}, 0) = \min_\Omega f(x, y)\}. \end{aligned}$$

Esercizio (5)

Calcolare il gradiente ∇f delle seguenti funzioni, specificando dove esiste

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 3x^2y + 3y^3 + \tfrac{3x}{1+y^2} \\ f_2(x,y) &= xe^{y^2} + y\log(xy) \\ f_3(x,y) &= e^{\sin y} + y^2\log(x). \end{aligned}$$

Soluzione (Esercizio 5)

(i) $\nabla f_1(x,y) = \left(6xy + \dfrac{3}{1+y^2},\ 3x^2 + 9y^2 - \dfrac{6xy}{(1+y^2)^2}\right)$, $(x,y) \in R^2$;

(ii) $\nabla f_2(x,y) = \left(e^{y^2} + \dfrac{y}{x},\ 2xye^{y^2} + \log(xy) + 1\right)$, $(x,y) \in R^2$, $xy > 0$;

(iii) $\nabla f_3(x,y) = \left(\dfrac{y^2}{x},\ \cos(y)e^{\sin(y)} + 2y\log(x)\right)$, $(x,y) \in R^2$, $x > 0$.

Esercizio (6)

Sia data la funzione $f(x,y) = 2y + xy - x^2 - y^2$.

(i) *Calcolare* $\nabla f(x,y)$.

(ii) *Calcolare* $\frac{\partial f}{\partial \nu}(-1,3)$ *quando* $\nu = \nu_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ *e quando* $\nu = \nu_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

(iii) *Calcolare l'equazione del piano tangente nel punto* $(1,-1,f(1,-1))$.

Soluzione (Esercizio 6)

(i) $\nabla f(x,y) = (y-2x,\ 2+x-2y)$.

(ii) $\nabla f(-1,3) = (5,-5)$, *e quindi*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,3) = \langle \nabla f(-1,3), (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_2}(-1,3) = \langle \nabla f(-1,3), (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})\rangle = -\tfrac{5}{2}(1+\sqrt{3})$$

Oppure si può usare direttamente la definizione, ad esempio nel caso $\nu_1 = (a,b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *si ha*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \nu_1}(-1,3) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(-1+at, 3+bt) - f(-1,3)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2(3+bt) + (-1+at)(3+bt) - (-1+at)^2 - (3+bt)^2 + 7}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{6-3-1-9+7+t(2b+3a-b+2a-6b)+o(t)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}(5a-5b) = -\frac{5}{2}(1+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

(iii) $z = f(1,-1) + \langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1)\rangle = -3x+5y+3$

Esercizio (7)

Data la funzione $f(x, y) = \frac{2x-2y}{x^2+y^2+1}$,

(i) *disegnate gli insiemi* $\{f = 0\}$, $\{f = -1\}$ *e* $\{f = 1/2\}$;

(ii) *disegnate gli insiemi* $\{f \leq 0\}$, $\{f \leq -1\}$ *e* $\{f \geq 1/2\}$.

Soluzione (Esercizio 7)

(i)

$$\begin{aligned}\{f=0\} &= \{(x,y)\ :\ x=y\}\\ \{f=-1\} &= \{(x,y)\ :\ (x+1)^2+(y-1)^2=1\}\\ \{f=1/2\} &= \{(x,y)\ :\ (x-2)^2+(y+2)^2=7\}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\{f\le 0\} &= \{(x,y)\ :\ x\le y\}\\ \{f\le -1\} &= \{(x,y)\ :\ (x+1)^2+(y-1)^2\le 1\}\\ \{f\ge 1/2\} &= \{(x,y)\ :\ (x-2)^2+(y+2)^2\le 7\}.\end{aligned}$$