Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

02 marzo 2009

Docente ed Esercitatori

Docente del corso:
Marino Belloni
(Ricevimento studenti:
Martedi' dalle 14.30 alle 16.30, oppure scrivere a marino.belloni@unipr.it
Pagina web:
http://www2.unipr.it/ belmar68/Didattica/Didattica.html)
Esercitazioni:
Prof.ssa Paola Perego (Informatica)
Prof. Fabrizio Menoni (Elettronica e Telecomunicazioni)

Docente ed Esercitatori

Docente del corso:
Marino Belloni
(Ricevimento studenti:
Martedi' dalle 14.30 alle 16.30, oppure scrivere a marino.belloni@unipr.it
Pagina web:
http://www2.unipr.it/ belmar68/Didattica/Didattica.html)
Esercitazioni:
Prof.ssa Paola Perego (Informatica)
Prof. Fabrizio Menoni (Elettronica e Telecomunicazioni)

Orario Lezioni

Lunedì, 11.30–13.30 (aula P) - Teoria -
Lunedì, 16.30–18.30 (aula P) - Elettronica e Telecom. - Prof. Menoni
Mercoledì, 14.30–16.30 (aula F) - Informatica - Prof.ssa Perego
Giovedì, 14.30–16.30 (Aula B) Elettronica, Telecomunicazioni e Informatica
Il giovedi' vengono fatte esercitazioni guidate, e si iniziera' il 12 marzo

Testi Consigliati

M.Belloni, L.Lorenzi: Calcolo differenziale ed integrale per funzioni di piu' variabili (Complementi ed Esercizi), Editore Pitagora (Bologna)

Testi Consigliati

M.Belloni, L.Lorenzi: Calcolo differenziale ed integrale per funzioni di piu' variabili (Complementi ed Esercizi), Editore Pitagora (Bologna)

Modalita' d'esame

L'esame consiste di

- *una soglia con 8 quiz a risposta multipla (+3 risposta esatta, -1 risposta sbagliata) in cui si deve ottenere una votazione maggiore o uguale a 10 per passare alla seconda prova (votazione: da -8 a 24)*
- *una seconda prova che consiste di 3 esercizi con risposta aperta insieme a 2 domande di natura teorica (definizioni, teoremi, etc)(votazione: da 0 a 40)*
- *La votazione complessiva sarà data dalla somma dei due voti diviso 2.*
- *L'esame è superato quando la votazione complessiva è maggiore o uguale a 18/30.*

Una eventuale prova orale è a discrezione del docente.

Programma

- *Curve nel piano e nello spazio. Parametrizzazioni, sostegno, vettore derivato, velocit scalare, vettore tangente, retta tangente. Curve di classe C1, C1 a tratti, semplici, chiuse e regolari.*
- *Lunghezza di una curva. Integrale curvilineo e ascissa curvilinea. Parametrizzazioni del bordo di sottinsiemi del piano.*
- *Funzioni di due variabili Grafico, sezioni e insiemi di livello, sottolivelli e sopralivelli.*
- *Ricerca dei punti di massimo e di minimo di una funzione di due variabili attraverso gli insiemi di livello. Paraboloidi, coni, superfici sferiche ed ellittiche. Funzioni dipendenti da una sola variabile e funzioni radiali.*
- *Elementi di topologia: punti interni, esterni, di accumulazione e di frontiera; insiemi aperti ed insiemi chiusi; aperti connessi. Insiemi convessi.*
- *Limiti per funzioni di due (o piu') variabili reali. Funzioni continue di due (o piu') variabili reali e loro proprieta'. Teorema di Weierstrass.*

Programma

- *Derivate direzionali e parziali. Funzioni di classe C1 e loro proprieta'. Gradiente e direzione di massima pendenza. Funzioni differenziabili. Piano tangente al grafico di una funzione. Regola della catena (derivazione delle funzioni composte).*
- *Punti stazionari. Funzioni di classe C2 e matrice Hessiana. Studio della natura dei punti stazionari: condizioni necessarie e sufficienti sugli estremi locali. Ottimizzazione di funzioni di classe C2.*
- *E.d.o. del primo ordine a coefficienti costanti. Problema di Cauchy.*
- *E.d.o. lineari del primo ordine. Problema di Cauchy.*
- *E.d.o. lineari di ordine n a coefficienti costanti. Integrale generale di equazioni omogenee. Metodo diretto per il calcolo di un integrale particolare di equazioni complete. Problema di Cauchy.*
- *Costruzione dell'integrale doppio. Funzioni di due variabili integrabili. Significato geometrico. Domini normali nel piano. Formule di riduzione degli integrali doppi su domini normali. Integrali di funzioni simmetriche su domini simmetrici. Matrice Jacobiana. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari.*
- *Integrali tripli*

Definizione (Curva)

Si dice `curva` *(piana) una funzione continua* $\varphi : I \to R^2$ *dove* $I \subseteq R$ *è un intervallo non vuoto. Al variare di* $t \in I$ *le equazioni*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) \\ y(t) = \varphi_2(t) \end{cases} , \quad t \in I$$

sono dette `equazioni parametriche` *della curva* φ*.*

Definizione (Curva)

Si dice `curva` *(piana) una funzione continua* $\varphi : I \to R^2$ *dove* $I \subseteq R$ *è un intervallo non vuoto. Al variare di* $t \in I$ *le equazioni*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) \\ y(t) = \varphi_2(t) \end{cases} , \quad t \in I$$

sono dette `equazioni parametriche` *della curva* φ*.*

Definizione (Sostegno di una curva)

Data una curva $\varphi : I \to R^2$*, l'insieme* $\varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\} \subset R^2$ *viene detto* `sostegno` *della curva.*

Definizione (Curva)

Si dice `curva` *(piana) una funzione continua* $\varphi : I \to R^2$ *dove* $I \subseteq R$ *è un intervallo non vuoto. Al variare di* $t \in I$ *le equazioni*

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) \\ y(t) = \varphi_2(t) \end{cases} \quad , \quad t \in I$$

sono dette `equazioni parametriche` *della curva* φ.

Definizione (Sostegno di una curva)

Data una curva $\varphi : I \to R^2$, *l'insieme* $\varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\} \subset R^2$ *viene detto* `sostegno` *della curva.*

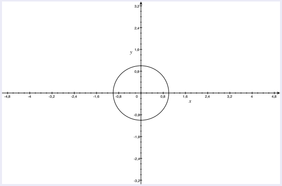
Osservazione

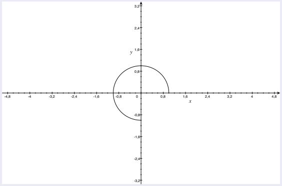
Un sostegno, se parametrizzabile, puo' essere parametrizzato in ∞ *modi diversi.*

Definizione

Data una curva piana $\varphi : I \to R^2$*, questa si dice*

(i) `chiusa` *se* $I = [a, b]$ *per qualche* $a, b \in R$*, tali che* $a < b$*, e* $\varphi(a) = \varphi(b)$*;*

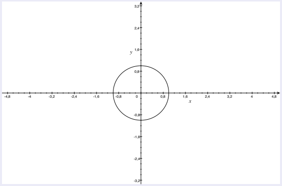


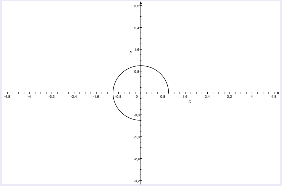


Definizione

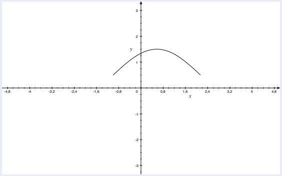
Data una curva piana $\varphi : I \rightarrow R^2$, *questa si dice*

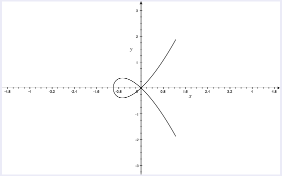
(i) `chiusa` *se* $I = [a, b]$ *per qualche* $a, b \in R$, *tali che* $a < b$, *e* $\varphi(a) = \varphi(b)$;





(ii) `semplice` *se, comunque fissati* $t_1, t_2 \in I$ *con* $t_1 \neq t_2$ *e tali che almeno uno tra* t_1 *e* t_2 *non sia un estremo dell'intervallo, si ha* $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$;





Definizione

(iii) derivabile in un punto $t_0 \in I$ *se lo sono le sue componenti* φ_1 *e* φ_2 *e si pone* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$.
φ *e'* derivabile in I *se è derivabile ogni punto di* I*;*

Definizione

(iii) derivabile in un punto $t_0 \in I$ *se lo sono le sue componenti* φ_1 *e* φ_2 *e si pone* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$.
φ *e'* derivabile in I *se è derivabile ogni punto di* I;

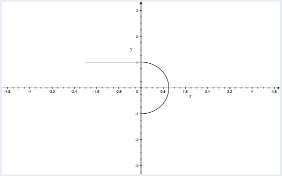
(iv) di classe C^1 *su* I *se* $\varphi_1', \varphi_2' : I \to R$ *sono continue su* I.

Definizione

(iii) `derivabile in un punto` $t_0 \in I$ *se lo sono le sue componenti* φ_1 *e* φ_2 *e si pone* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$.
φ *e'* `derivabile in` I *se è derivabile ogni punto di* I*;*

(iv) `di classe` C^1 *su* I *se* $\varphi_1', \varphi_2' : I \to R$ *sono continue su* I.

(v) `regolare` `in` $t_0 \in I$ *se la funzione* φ *è derivabile in* t_0 *(ovvero se le componenti* φ_1 *e* φ_2 *lo sono) e* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0)) \neq (0,0)$.

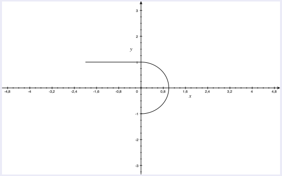


Definizione

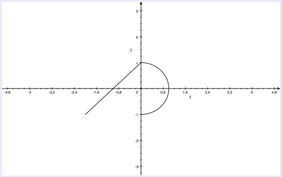
(iii) derivabile in un punto $t_0 \in I$ *se lo sono le sue componenti* φ_1 *e* φ_2 *e si pone* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$.
φ *e'* derivabile in I *se è derivabile ogni punto di* I*;*

(iv) di classe C^1 *su* I *se* $\varphi_1', \varphi_2' : I \to R$ *sono continue su* I.

(v) regolare in $t_0 \in I$ *se la funzione* φ *è derivabile in* t_0 *(ovvero se le componenti* φ_1 *e* φ_2 *lo sono) e* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0)) \neq (0,0)$.



(vi) regolare a tratti *se l'intervallo* $I = \cup_{i=1}^m I_k$, $I_k \cap I_h = \emptyset$, *in modo che la restrizione* φ_{I_k} *sia una curva regolare.*



Osservazione

- *Se φ_1 (φ_2) è iniettiva, allora $\varphi : I \to R^2$ è semplice.*
  Infatti l'equazione $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2), \\ \varphi_2(t_1) = \varphi_2(t_2). \end{cases} \tag{0.1}$$

Se φ_1 è iniettiva, la prima relazione in (0.1) implica $t_1 = t_2$. Analogamente si ragiona nel caso in cui φ_2 sia iniettiva.

Esempio

(i) *La funzione* $\varphi : [0,1] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = (1,1)$ *per ogni* $t \in [0,1]$, *è una curva chiusa avente come sostegno l'insieme* $\varphi([0,1]) = \{(1,1)\}$.
La curva è di classe C^1 *ma* **non***è regolare perché* $\varphi'(t) = (0,0)$ *per ogni* $t \in [0,1]$.

Esempio

(i) *La funzione* $\varphi : [0,1] \to R^2$*, definita da* $\varphi(t) = (1,1)$ *per ogni* $t \in [0,1]$*, è una curva chiusa avente come sostegno l'insieme* $\varphi([0,1]) = \{(1,1)\}$*.*
La curva è di classe C^1 *ma* **non***è regolare perché* $\varphi'(t) = (0,0)$ *per ogni* $t \in [0,1]$*.*

(ii) *La funzione* $\varphi : [0,2] \to R^2$ *così definita*

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t,1), & \text{se } t \in [0,1], \\ (t,-1), & \text{se } t \in]1,2], \end{cases}$$

non *è una curva: infatti*

$$\varphi(1^-) = (1,1) \neq (1,-1) = \varphi(1^+)$$

ovvero φ *non è continua in* $t = 1$*.*

Esempio

(i) *La funzione* $\varphi : [0,1] \to R^2$*, definita da* $\varphi(t) = (1,1)$ *per ogni* $t \in [0,1]$*, è una curva chiusa avente come sostegno l'insieme* $\varphi([0,1]) = \{(1,1)\}$*.*
La curva è di classe C^1 *ma* **non***è regolare perché* $\varphi'(t) = (0,0)$ *per ogni* $t \in [0,1]$*.*

(ii) *La funzione* $\varphi : [0,2] \to R^2$ *così definita*

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t,1), & \text{se } t \in [0,1], \\ (t,-1), & \text{se } t \in]1,2], \end{cases}$$

non *è una curva: infatti*

$$\varphi(1^-) = (1,1) \neq (1,-1) = \varphi(1^+)$$

ovvero φ *non è continua in* $t = 1$*.*

(iii) *La funzione* $\varphi : [0,1] \cup [3,4] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (t,t)$ **non** *è una curva:* $[0,1] \cup [3,4]$ *non è un intervallo.*

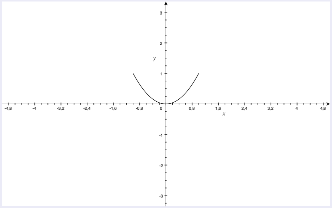
Esempio

(iv) *La funzione* $\varphi : [-1,1] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (t, t^2)$ *è una curva regolare e semplice. La curva* φ **non***è chiusa, infatti*

$$\varphi(-1) = (-1,1) \neq \varphi(1) = (1,1).$$

Il suo sostegno è $\varphi([-1,1]) = \{(t,t^2) : t \in [-1,1]\}$ *(un arco di parabola).*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow y = x^2$$



Esempio

Sia dato $S = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$*, la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine.*

Esempio

Sia dato $S = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$*, la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine.*

- *La funzione* $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare, semplice e chiusa. Il suo sostegno è* $\varphi([0, 2\pi]) = S$

Esempio

Sia dato $S = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$, *la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine.*

- *La funzione* $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare, semplice e chiusa. Il suo sostegno è* $\varphi([0, 2\pi]) = S$
- *La funzione* $\varphi : [0, 4\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare e chiusa. La curva* **non***è semplice in quanto* $\varphi(\pi) = \varphi(3\pi)$. *Il suo sostegno è l'insieme* $\varphi([0, 4\pi]) = S$.

Esempio

Sia dato $S = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$, *la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine.*

- *La funzione* $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare, semplice e chiusa. Il suo sostegno è* $\varphi([0, 2\pi]) = S$
- *La funzione* $\varphi : [0, 4\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare e chiusa. La curva* **non***è semplice in quanto* $\varphi(\pi) = \varphi(3\pi)$*. Il suo sostegno è l'insieme* $\varphi([0, 4\pi]) = S$.
- *La funzione* $\varphi : [0, 3\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare. La curva* **non***è semplice in quanto* $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$*. La curva* **non***è chiusa in quanto* $\varphi(0) \neq \varphi(3\pi)$*. Il suo sostegno è l'insieme* $\varphi([0, 3\pi]) = S$.

Esempio

Sia dato $S = \{(x, y) \in R^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$, *la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine.*

- *La funzione* $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare, semplice e chiusa. Il suo sostegno è* $\varphi([0, 2\pi]) = S$
- *La funzione* $\varphi : [0, 4\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare e chiusa. La curva* **non***è semplice in quanto* $\varphi(\pi) = \varphi(3\pi)$*. Il suo sostegno è l'insieme* $\varphi([0, 4\pi]) = S$.
- *La funzione* $\varphi : [0, 3\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *è una curva regolare. La curva* **non***è semplice in quanto* $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$*. La curva* **non***è chiusa in quanto* $\varphi(0) \neq \varphi(3\pi)$*. Il suo sostegno è l'insieme* $\varphi([0, 3\pi]) = S$.

Dunque abbiamo trovato, in corrispondenza ad un fissato sostegno, 3 diverse parametrizzazioni.

Esempio

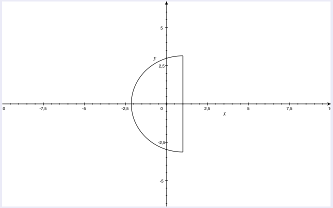
- *La funzione* $\varphi : [\pi/2, 7\pi/2] \to R^2$ *definita da*

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\pi\cos(t) + 1, \pi\sin(t)), & \text{se } t \in [\pi/2, 3\pi/2[, \\ (0, t - 5\pi/2), & \text{se } t \in [3\pi/2, 7\pi/2]. \end{cases}$$

è una curva regolare a tratti, semplice e chiusa.
$\varphi'(3\pi/2)$ *non esiste.*

  - *la derivata sinistra* $\varphi_1'(3\pi/2^-) = -\pi\sin(3\pi/2) = \pi$
  - *la derivata destra* $\varphi_1'(3\pi/2^+) = 0$.

Essendo derivata sinistra e derivata destra diverse, la funzione φ_1 *non è derivabile in* $t = 3\pi/2$. *Quindi la curva* φ *non è derivabile in* $t = 3\pi/2$.

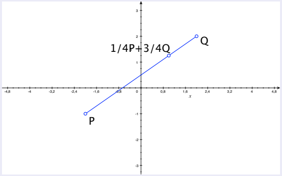


Esempio (Esempio importante)

- *Dati due punti* $P = (x_0, y_0)$ *e* $Q = (x_1, y_1)$ *nel piano, la funzione* $\varphi : [0,1] \to R^2$ *definita da*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= tQ + (1-t)P \\ &= (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) \end{aligned} \qquad t \in [0,1]$$

è una curva regolare, il cui sostegno è il segmento che unisce i punti P *e* Q.



Se invece come dominio consideriamo tutto R *la curva* φ *concide con l'*`equazione parametrica` *della retta passante per i punti* P *e* Q. *Infine, volendo trovare una curva che abbia per sostegno il segmento* $\overline{QP}$ *percorso da* Q *a* P, *basterà scambiare nella definizione di* φ, *rispettivamente,* x_0 *con* x_1 *e* y_0 *con* y_1.

Esempio (Esempio importante)

- *Dato un intervallo* $I \subseteq R$ *e una funzione* $f : I \to R$ *continua, la curva* $\varphi : I \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (t, f(t))$ *per ogni* $t \in I$ *ha come sostegno il grafico di* f*.*

Esempio (Esempio importante)

- *Dato un intervallo $I \subseteq R$ e una funzione $f : I \to R$ continua, la curva $\varphi : I \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (t, f(t))$ per ogni $t \in I$ ha come sostegno il grafico di f.*
- *La curva φ è detta* `in forma cartesiana`.

Esempio (Esempio importante)

- *Dato un intervallo $I \subseteq R$ e una funzione $f : I \to R$ continua, la curva $\varphi : I \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (t, f(t))$ per ogni $t \in I$ ha come sostegno il grafico di f.*
- *La curva φ è detta* `in forma cartesiana`*.*
- *La funzione $\varphi_1(t) = t$ è derivabile in I con derivata continua. Allora φ è derivabile in I se, e solo se, f è derivabile.*

Esempio (Esempio importante)

- *Dato un intervallo* $I \subseteq R$ *e una funzione* $f : I \to R$ *continua, la curva* $\varphi : I \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (t, f(t))$ *per ogni* $t \in I$ *ha come sostegno il grafico di* f.
- *La curva* φ *è detta* `in forma cartesiana`.
- *La funzione* $\varphi_1(t) = t$ *è derivabile in* I *con derivata continua. Allora* φ *è derivabile in* I *se, e solo se,* f *è derivabile.*
- *Quando* f *è derivabile in* I*, la curva* φ *è regolare in quanto* $\varphi'(t) = (1, f'(t))$ *e, quindi,* $\varphi'(t) \neq (0, 0)$ *per ogni* $t \in I$.

Esempio (Esempio importante)

- *Dato un intervallo* $I \subseteq R$ *e una funzione* $f : I \to R$ *continua, la curva* $\varphi : I \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (t, f(t))$ *per ogni* $t \in I$ *ha come sostegno il grafico di* f*.*
- *La curva* φ *è detta* `in forma cartesiana`*.*
- *La funzione* $\varphi_1(t) = t$ *è derivabile in* I *con derivata continua. Allora* φ *è derivabile in* I *se, e solo se,* f *è derivabile.*
- *Quando* f *è derivabile in* I*, la curva* φ *è regolare in quanto* $\varphi'(t) = (1, f'(t))$ *e, quindi,* $\varphi'(t) \neq (0,0)$ *per ogni* $t \in I$*.*
- *Infine,* $\varphi_1(t) = t$ *è iniettiva, quindi* $\varphi(t) = (t, f(t))$ *non è chiusa ed è semplice.*

Esempio (Velocità di percorrenza)

Le curve

- $\varphi : [0, \pi] \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (4\cos(t), 4\sin(t))$ per ogni $t \in [0, \pi]$,

Esempio (Velocità di percorrenza)

Le curve

- $\varphi : [0, \pi] \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (4\cos(t), 4\sin(t))$ per ogni $t \in [0, \pi]$,
- $\psi : [0, \pi/2] \to R^2$ definita da $\psi(t) = (4\cos(2t), 4\sin(2t))$ per ogni $t \in [0, \pi/2]$,

Esempio (Velocità di percorrenza)

Le curve

- $\varphi : [0, \pi] \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (4\cos(t), 4\sin(t))$ per ogni $t \in [0, \pi]$,
- $\psi : [0, \pi/2] \to R^2$ definita da $\psi(t) = (4\cos(2t), 4\sin(2t))$ per ogni $t \in [0, \pi/2]$,
- $\zeta : [0, 2\pi] \to R^2$ definita da $\zeta(t) = (4\cos(t/2), 4\sin(t/2))$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

sono tutte regolari, semplici e parametrizzano tutte lo stesso sostegno, cioè l'insieme

$$\{(x, \sqrt{16 - x^2}) : \ x \in [-4, 4]\},$$

ovvero la porzione della circonferenza con centro nell'origine avente raggio 4 contenuta in $\{y \geq 0\}$.

Definizione

Due curve $\varphi : I \to R^2$ *e* $\psi : J \to R^2$ *aventi lo stesso sostegno* $S = \varphi(I) = \psi(J)$*, si dicono* `equivalenti` *se esiste una funzione* $g : I \to J$ `biiettiva, di classe` C^1 `con derivata sempre diversa da 0 in` I*, tale che* $\varphi(t) = \psi(g(t))$ *per ogni* $t \in I$*.*

Esempio

Le curve

- $\varphi : [0,2] \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (t-1, 2t)$ per ogni $t \in [0,2]$,
- $\psi : [0,1] \to R^2$ definita da $\psi(t) = (2t-1, 4t)$ per ogni $t \in [0,1]$,

sono regolari, semplici, non chiuse ed hanno lo stesso sostegno

$$\varphi([0,2]) = \psi([0,1]) = \{(x, 2x+2) : \ x \in [-1,1]\}.$$

Queste curve risultano equivalenti nel senso della Definizione 5: infatti la funzione $g : [0,2] \to [0,1]$, definita da $g(t) = t/2$ per ogni $t \in [0,2]$, (biiettiva, di classe C^1 assieme alla sua inversa) è tale che $\psi(g(t)) = \varphi(t)$ per ogni $t \in [0,2]$.

Fino a qui abbiamo considerato un problema “diretto”:

Problema (Diretto: dalla curva al sostegno)

data una funzione φ, stabilire se sia o meno una curva a) regolare o regolare a tratti, b) semplice, c) chiusa, e determinarne il sostegno.

Fino a qui abbiamo considerato un problema “diretto”:

Problema (Diretto: dalla curva al sostegno)

data una funzione φ, stabilire se sia o meno una curva a) regolare o regolare a tratti, b) semplice, c) chiusa, e determinarne il sostegno.

Esiste anche un problema “inverso”:

Fino a qui abbiamo considerato un problema "diretto":

Problema (Diretto: dalla curva al sostegno)

data una funzione φ, stabilire se sia o meno una curva a) regolare o regolare a tratti, b) semplice, c) chiusa, e determinarne il sostegno.

Esiste anche un problema "inverso":

Problema (Inverso: dal sostegno alla curva)

dato un insieme $S \subseteq R^2$, stabilire se esista o meno una curva $\varphi : I \to R^2$ (magari regolare a tratti) tale che $\varphi(I) = S$, ovvero avente S come sostegno.

Fino a qui abbiamo considerato un problema “diretto”:

Problema (Diretto: dalla curva al sostegno)

data una funzione φ, stabilire se sia o meno una curva a) regolare o regolare a tratti, b) semplice, c) chiusa, e determinarne il sostegno.

Esiste anche un problema “inverso”:

Problema (Inverso: dal sostegno alla curva)

dato un insieme $S \subseteq R^2$, stabilire se esista o meno una curva $\varphi : I \to R^2$ (magari regolare a tratti) tale che $\varphi(I) = S$, ovvero avente S come sostegno.

Osservazione

Questo problema "INVERSO", se ha una soluzione, ne ha infinite.

Fino a qui abbiamo considerato un problema “diretto”:

Problema (Diretto: dalla curva al sostegno)

data una funzione φ, stabilire se sia o meno una curva a) regolare o regolare a tratti, b) semplice, c) chiusa, e determinarne il sostegno.

Esiste anche un problema “inverso”:

Problema (Inverso: dal sostegno alla curva)

dato un insieme $S \subseteq R^2$, stabilire se esista o meno una curva $\varphi : I \to R^2$ (magari regolare a tratti) tale che $\varphi(I) = S$, ovvero avente S come sostegno.

Osservazione

Questo problema "INVERSO", se ha una soluzione, ne ha infinite.

Esempio

È bene osservare che il problema INVERSO può non avere soluzioni. Ad esempio l'insieme $S = \{(0,0),(1,2)\}$ non è sostegno di alcuna curva.

Esempio

Dato l'insieme

$$S = \{(x, \sqrt{4 - x^2}) : \ x \in [-2, 2]\} \cup \{(x, 0) : \ x \in [-2, 2]\},$$

determinare una curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \to R^2$ *che lo parametrizzi, cioè* $\varphi([a, b]) = S$.
Una soluzione è la curva regolare a tratti, semplice e chiusa

$$\varphi(t) = \begin{cases} (2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t)), & \textit{se } t \in [0, 1], \\ (t - 3, 0), & \textit{se } t \in]1, 5], \end{cases}$$

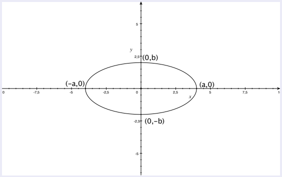
ma ne possiamo trovare infinite altre, anche non chiuse. Ad esempio?

Esempio (L'ellisse)

- *Siano* $a, b > 0$. *L'insieme*

$$S = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

rappresenta un'ellisse con centro in $(0, 0)$ *e semiassi* a *e* b.



Se $(x, y) \in S$, *il punto di coordinate* $(x/a, y/b)$ *appartiene alla circonferenza con centro in* $(0, 0)$ *e raggio* 1, *e quindi si ha che*

$$\begin{cases} \dfrac{x(t)}{a} = \cos(t) \\ \dfrac{y(t)}{b} = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

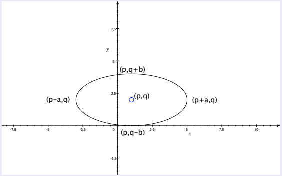
Allora $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$, *dove* $\varphi(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ $t \in [0, 2\pi]$.

Esempio

- *Più in generale*

$$S = \left\{ (x,y) \in R^2 : \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \right\},$$

è l'ellisse con centro in (p,q) e semiassi a e b,



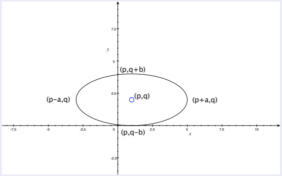
La $\varphi : [0,2\pi] \to R^2$ definita da $\varphi(t) = (p + a\cos(t), q + b\sin(t))$ per ogni $t \in [0,2\pi]$, che va in senso antiorario a partire dal punto $(p+a,q)$, è tale che $\varphi([0,2\pi]) = S$.

Esempio

- *Più in generale*

$$S = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \right\},$$

è l'ellisse con centro in (p, q) *e semiassi* a *e* b,



La $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (p + a\cos(t), q + b\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$, *che va in senso antiorario a partire dal punto* $(p + a, q)$, *è tale che* $\varphi([0, 2\pi]) = S$.

- *La curva* $\varphi : [0, 2\pi] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (p + a\cos(t), q - b\sin(t))$ *per ogni* $t \in [0, 2\pi]$ *percorre l'ellisse in senso orario a partire dal punto* $(p + a, q)$.

Definizione

Sia $\varphi : I \rightarrow R^2$*, e sia* $P_0 = \varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) \in \varphi(I)$*. Se* φ *è regolare in* t_0 *(ovvero* $\exists\ \varphi'(t_0) \neq (0,0)$*), allora* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ *è detto* `vettore tangente a` φ *in* $P_0 = \varphi(t_0)$*.*

Definizione

Sia $\varphi : I \to R^2$, *e sia* $P_0 = \varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) \in \varphi(I)$. *Se* φ *è regolare in* t_0 *(ovvero* $\exists\ \varphi'(t_0) \neq (0,0)$*), allora* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ *è detto* `vettore tangente a` φ *in* $P_0 = \varphi(t_0)$.
Se non esiste $t_1 \neq t_0$ *tale che* $\varphi(t_1) = P_0$, *la retta*

$$(x(t), y(t)) = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \varphi_1(t_0) + t\varphi_1'(t_0) \\ y(t) = \varphi_2(t_0) + t\varphi_2'(t_0) \end{cases} , \quad t \in R,$$

si dice `retta tangente alla curva` φ *nel punto* $P_0 = \varphi(t_0)$.
Se la retta tangente esiste in P_0, *allora è unica.*

Definizione

Sia $\varphi : I \to R^2$, *e sia* $P_0 = \varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) \in \varphi(I)$. *Se* φ *è regolare in* t_0 *(ovvero* $\exists\ \varphi'(t_0) \neq (0,0)$*), allora* $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ *è detto* `vettore tangente a` φ *in* $P_0 = \varphi(t_0)$.
Se non esiste $t_1 \neq t_0$ *tale che* $\varphi(t_1) = P_0$*, la retta*

$$(x(t), y(t)) = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \varphi_1(t_0) + t\varphi_1'(t_0) \\ y(t) = \varphi_2(t_0) + t\varphi_2'(t_0) \end{cases} \quad , \quad t \in R,$$

si dice `retta tangente alla curva` φ *nel punto* $P_0 = \varphi(t_0)$.
Se la retta tangente esiste in P_0*, allora è unica.*

Definizione

Data una curva $\varphi : I \to R^2$ *regolare in* t_0*, il* `versore tangente` T *ed il* `versore normale` N *alla curva nel punto* $\varphi(t_0)$ *sono*

$$\overrightarrow{T}(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} = \frac{(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))}{\sqrt{(\varphi_1'(t_0))^2 + (\varphi_2'(t_0))^2}}.$$

$$\overrightarrow{N}(t_0) = \frac{(\varphi_2'(t_0), -\varphi_1'(t_0))}{\sqrt{(\varphi_1'(t_0))^2 + (\varphi_2'(t_0))^2}}.$$

Osservazione

(i) φ *regolare in* t_0 *equivale a dire che esiste il vettore tangente in* $\varphi(t_0)$.

Osservazione

(i) φ *regolare in* t_0 *equivale a dire che esiste il vettore tangente in* $\varphi(t_0)$.

(ii) *Data* $\varphi(t) = (t, 3t + 1)$ *per ogni* $t \in [-1, 1]$, *si ha* $\varphi'(t) = (1, 3)$. *La retta tangente in un qualsiasi punto* $\varphi(t_0)$ *coincide con* φ: *la retta tangente a una retta è la retta medesima!*

Osservazione

(i) *φ regolare in t_0 equivale a dire che esiste il vettore tangente in $\varphi(t_0)$.*

(ii) *Data $\varphi(t) = (t, 3t+1)$ per ogni $t \in [-1, 1]$, si ha $\varphi'(t) = (1, 3)$. La retta tangente in un qualsiasi punto $\varphi(t_0)$ coincide con φ: la retta tangente a una retta è la retta medesima!*

(iii) *La retta tangente a $\varphi : I \to R^2$ in $P = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$, si può scrivere in* `forma cartesiana`*, se $\varphi_1'(t_0) \neq 0$ nel seguente modo:*

$$\begin{cases} x(t) - \varphi_1(t_0) = t\varphi_1'(t_0) \\ y(t) - \varphi_2(t_0) = t\varphi_2'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow (y - \varphi_2(t_0)) = \frac{x - \varphi_1(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}\varphi_2'(t_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \varphi_2(t_0) + \frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}(x - \varphi_1(t_0)),$$

Osservazione

(i) *φ regolare in t_0 equivale a dire che esiste il vettore tangente in $\varphi(t_0)$.*

(ii) *Data $\varphi(t) = (t, 3t+1)$ per ogni $t \in [-1,1]$, si ha $\varphi'(t) = (1,3)$. La retta tangente in un qualsiasi punto $\varphi(t_0)$ coincide con φ: la retta tangente a una retta è la retta medesima!*

(iii) *La retta tangente a $\varphi : I \to R^2$ in $P = (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$, si può scrivere in* `forma cartesiana`*, se $\varphi_1'(t_0) \neq 0$ nel seguente modo:*

$$\begin{cases} x(t) - \varphi_1(t_0) = t\varphi_1'(t_0) \\ y(t) - \varphi_2(t_0) = t\varphi_2'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow (y - \varphi_2(t_0)) = \frac{x - \varphi_1(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}\varphi_2'(t_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \varphi_2(t_0) + \frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}(x - \varphi_1(t_0)),$$

Osservazione (Curva regolare - $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$)

Quando una

- *Quindi* **non ci sono punti di arresto** *(punti in cui la velocità è nulla),*
- *la curva viene* **percorsa sempre nello stesso verso** *(se A è il punto iniziale e B è il punto finale, la distanza misurata lungo il sostegno della curva tra $\varphi(t)$ ed A è una funzione della variabile t monotona crescente).*

Osservazione

- *Se φ è regolare in t_0, dato $T(t_0)$, ci sono due possibili versori normali!!!*
- *Con la nostra scelta per N, se ci muoviamo lungo una curva piana chiusa in verso antiorario (orientazione positiva), N sarà esterno alla porzione di piano delimitata dalla curva;*
- *inoltre la coppia $(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{T})$ risulterà orientata concordemente ai versori (i, j) degli assi del riferimento cartesiano.*

Esempio

La curva $v : [-2,2] \to R^2$ *definita da* $v(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, *per ogni* $t \in [-2,2]$, *è una curva*

- *regolare,*
- **non** *semplice*
- **non** *chiusa.*

Esempio

La curva $v : [-2,2] \to R^2$ *definita da* $v(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, *per ogni* $t \in [-2,2]$, *è una curva*

- *regolare,*
- **non** *semplice*
- **non** *chiusa.*

Il vettore tangente nel generico punto $v(t)$ *è dato da* $v'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$. *Ad esempio*

- *nel punto* $v(2) = (3,6)$ *il vettore tangente è* $v'(2) = (4,11)$, *e quindi la retta tangente ha equazione* $(x(t), y(t)) = (3 + 4t, 6 + 11t)$, *per ogni* $t \in R$, *ovvero* $y = \frac{1}{4}(11x - 9)$;

Esempio

La curva $v : [-2, 2] \to R^2$ *definita da* $v(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, *per ogni* $t \in [-2, 2]$, *è una curva*

- *regolare,*
- **non** *semplice*
- **non** *chiusa.*

Il vettore tangente nel generico punto $v(t)$ *è dato da* $v'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$. *Ad esempio*

- *nel punto* $v(2) = (3, 6)$ *il vettore tangente è* $v'(2) = (4, 11)$, *e quindi la retta tangente ha equazione* $(x(t), y(t)) = (3 + 4t, 6 + 11t)$, *per ogni* $t \in R$, *ovvero* $y = \frac{1}{4}(11x - 9)$;
- *nel punto* $v(1) = (0, 0)$ *il vettore tangente è* $v'(1) = (2, 2)$. *Poiché* $v(-1) = (0, 0)$ *e* $v'(-1) = (-2, 2)$, *non esiste la retta tangente nel punto* $(0, 0)$;

Esempio

La curva $v : [-2,2] \to R^2$ *definita da* $v(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$*, per ogni* $t \in [-2,2]$*, è una curva*

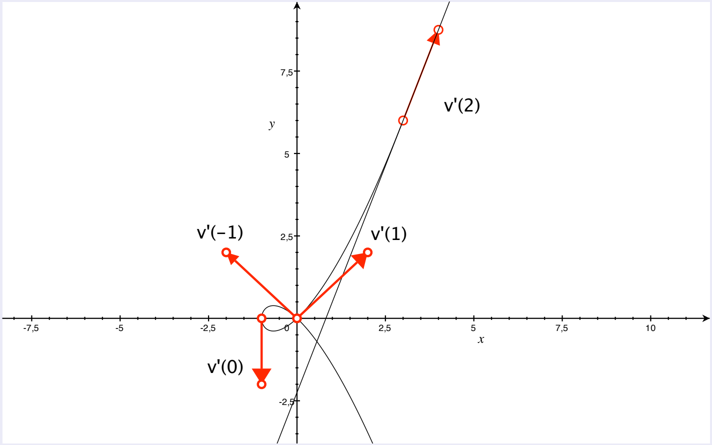
- *regolare,*
- **non** *semplice*
- **non** *chiusa.*

Il vettore tangente nel generico punto $v(t)$ *è dato da* $v'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$*. Ad esempio*

- *nel punto* $v(2) = (3,6)$ *il vettore tangente è* $v'(2) = (4,11)$*, e quindi la retta tangente ha equazione* $(x(t), y(t)) = (3 + 4t, 6 + 11t)$*, per ogni* $t \in R$*, ovvero* $y = \frac{1}{4}(11x - 9)$*;*
- *nel punto* $v(1) = (0,0)$ *il vettore tangente è* $v'(1) = (2,2)$*. Poiché* $v(-1) = (0,0)$ *e* $v'(-1) = (-2,2)$*, non esiste la retta tangente nel punto* $(0,0)$*;*
- *nel punto* $v(0) = (-1,0)$ *il vettore tangente è* $v'(0) = (0,-1)$*, e quindi la retta tangente ha equazione* $(x(t), y(t)) = (-1, -t)$*, per ogni* $t \in R$*, ovvero* $x = -1$*.*

Queste informazioni permettono di disegnare più accuratamente il sostegno.

Figura



Esempio

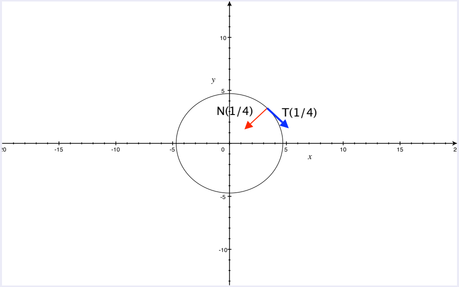
Data la curva regolare, semplice e chiusa $\varphi : [0,2] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (2\sin(\pi t), 2\cos(\pi t))$, *per ogni* $t \in [0,2]$, *si ha che*

$$\varphi'(t) = (2\pi\cos(\pi t), -2\pi\sin(\pi t)) \neq 0,$$

per ogni $t \in [0,2]$. *In corrispondenza a* $t = 1/4$, *ovvero nel punto* $\varphi(1/4) = (\sqrt{2}\pi, \sqrt{2}\pi)$, *troviamo che*

$$\varphi'(1/4) = (\sqrt{2}\pi, -\sqrt{2}\pi), \quad \overrightarrow{T}(1/4) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2),$$

$$\overrightarrow{N}(1/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$



Esempio

La curva $\varphi : [-2,2] \to R^2$, *definita da* $\varphi(t) = \left(t,\ t^2\right)$, *per ogni* $t \in [-2,2]$, *è una curva regolare, semplice e* **non***chiusa. Il vettore tangente alla curva nel punto* $(1,1) = \varphi(1)$, *è* $\varphi'(1) = (1,2)$; *il versore tangente in questo punto è* $(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, *mentre il versore normale è* $(2/\sqrt{5},\ -1/\sqrt{5})$. *Il sostegno di questa curva è l'arco di parabola* $\{(x,y) \in R^2 :\ y = x^2,\ -2 \le x \le 2\}$.