Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Marino Belloni

11 maggio 2009

Integrazione secondo Riemann

Teorema (Teorema di riduzione)

Sia $f : \Omega \subset R^2 \to R$ continua definita su Ω misurabile.

(i) *Se $A \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse x,*

$$A = \Big\{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\},$$

allora

- *la funzione $x \mapsto U(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$ è continua in $[a, b]$*
- *inoltre si ha*

$$\int_A f(x, y)\, dxdy = \int_a^b U(x)\, dx = \int_a^b dx \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy\right);$$

Integrazione secondo Riemann

Teorema (...continua...)

(ii) *Se $B \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse y,*

$$B = \left\{(x,y) \in R^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\right\},$$

allora

- *la funzione $y \mapsto V(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$ è continua in $[c,d]$*
- *inoltre si ha*

$$\int_B f(x,y)\,dxdy = \int_c^d V(y)\,dy = \int_c^d dy \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right).$$

Integrazione secondo Riemann

Esempio

Calcoliamo il baricentro del triangolo T di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,0)$.
T è normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y, e si ha

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x\} \\ &= \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 1 - y/2\}. \end{aligned}$$

Utilizzando il Teorema di riduzione

$$\int_T \mathcal{I}_T \, dxdy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{2-2x} \mathcal{I}_T \, dy \right) = \int_0^1 (2-2x)\, dx = 1,$$

$$\int_T x \, dxdy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{2-2x} x \, dy \right) = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_T y \, dxdy = \int_0^2 dy \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} y \, dx \right) = \int_0^2 \left(y - \frac{1}{2} y^2 \right) dx = \frac{2}{3}.$$

Le coordinate del baricentro geometrico di T sono quindi $(x_T, y_T) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Jacobiano

Data una funzione $f : \Omega \subset R^3 \to R$ differenziabile, abbiamo visto che è possibile calcolare in $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ il vettore gradiente

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (x_0, y_0, z_0).$$

Quando invece abbiamo a che fare con una curva $\gamma : [a, b] \to R^3$ derivabile, aveva senso calcolare in $t_0 \in [a, b]$

$$\gamma'(t_0)^T = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \gamma_3'(t_0))$$

Se abbiamo un campo vettoriale $F : \Omega \subset R^3 \to R^3$, ovvero una applicazione

$$(x, y, z) \to (F_1(x, y, z),\ F_2(x, y, z),\ F_3(x, y, z))$$

e ognuna delle componenti è differenziabile ($F_i : \Omega \to R$), potremo associare a F la matrice J_F così definita

$$J_f(P_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(P_0) \\ \nabla F_2(P_0) \\ \nabla F_3(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(P_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(P_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix}$$

Jacobiano

Esempio

Preso ad esempio il campo vettoriale $F : R^2 \to R^3$

$$F(x,y) = (x^2 + y,\ y^3,\ \sin(x) + y)$$

troviamo che

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x,y) \\ \nabla F_2(x,y) \\ \nabla F_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 3y^2 \\ \cos(x) & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio

Preso ad esempio il campo vettoriale $G : R^3 \to R^2$

$$G(x,y,z) = (x^2 + z,\ y^3)$$

troviamo che

$$J_G(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(x,y,z) \\ \nabla G_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 0 & 3y^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiano

Esempio

Se prendiamo $H(x,y) = G \circ F(x,y) = G(F(x,y))$*, come calcolare* $J_H(x,y)$*?*
Si utilizza la derivata della funzione composta, che ci dice che

$$J_H(x,y) = J_G(F(x,y)) \cdot J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^2+y) & 0 & 1 \\ 0 & 3(y^3)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 3y^2 \\ \cos(x) & 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che $H : R^2 \to R^2$*, e infatti la matrice Jacobiana ottenuta è* 2×2*!*

Cambiamento di variabili

Per le funzioni di una variabile vale il seguente risultato:

Teorema

Date

- $f : I \to R$ *continua*
- $\varphi : J \to I$ *di classe* C^1,

allora (indicando con F *una primitiva di* f*, ovvero* $F' = f$*) si ha*

$$\int (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)\,dx = (F \circ \varphi)(x) + C, \qquad C \in R$$

Nel caso di integrali definiti, si ottiene la formula (il cambiamento di variabile è $y = \varphi(x)$)

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy$$

Cambiamento di variabili

Se adesso supponiamo che $a < b$, allora si possiamo porre

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

e vale il seguente teorema

Teorema

Date

- $f : \varphi([a,b]) \to R$ *continua*
- $\varphi : [a,b] \to \varphi([a,b])$ *di classe* C^1 *iniettiva,*

allora

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(\varphi(y))|\varphi'(y)|\,dy$$

Questo teorema si estende in modo naturale a R^2.

Cambiamento di variabili

Teorema (Cambiamento di variabili negli integrali doppi)

Sia

- $\Omega, \Lambda \subseteq R^2$ *aperti*
- $\Phi : \Omega \longrightarrow \Lambda$
  - *biiettiva,*
  - *di classe* C^1
  - *tale che* $0 < |\det J_\Phi(u, v)| < +\infty$ *per ogni* $(u, v) \in \Omega$.

Se $f : E \subset \Lambda \to R$ *è continua con* E *misurabile, allora*

$$\int_E f(x, y)\, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u, v))\, |\det J_\Phi(u, v)|\, dudv.$$

Cambiamento di variabili

Osservazione

La misura di Peano-Jordan è invariante per traslazioni.

- *Sia T una traslazione. Allora T è un'applicazione lineare, la cui matrice R rispetto alla base canonica di R^2 ha determinante 1 o -1.*
- $J_T = R$
- $|\mathrm{det} J_T(u,v)| = 1$ *per ogni* $(u,v) \in R^2$.

$$\begin{aligned} m(T(E)) &= \int_{T(E)} 1 dxdy \\ &= \int_{T^{-1}(T(E))} |\mathrm{det} J_T(u,v)| dudv \\ &= \int_E 1 dudv = m(E). \end{aligned}$$

Cambiamento di variabili

Osservazione

Osserviamo che se $\Phi : \Omega \to \Lambda$ *biiettiva e di classe* C^1, *allora posto* $\Psi = \Phi^{-1}$ *si ha*

$$\Phi \circ \Psi(x) = I(x) \text{ dove } I = \text{identita}.$$

Ma allora

$$J_I(x) = J_\Phi(\Psi(x))J_\Psi(x) \Longrightarrow 1 = |\det[J_I(x)]| = |\det[J_\Phi(\Psi(x))]||\det[J_\Psi(x)]|$$

Questo ci dice che, noto $|\det[J_\Phi(z)]|$, *si può calcolare* $|\det[J_\Psi(x)]|$ *e viceversa.*

Cambiamento di variabili

Esempio

Calcolare I_1, *dove* E *è il triangolo di vertici* $(0,-1)$, $(3,2)$ *e* $(4,1)$.

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_E (x+y+1)(x-y-1)\,dxdy,$$

- *Cambio di variabili*

$$(u,v) \to \left(\frac{1}{2}(x+y+1),\ \frac{1}{2}(x-y-1)\right)$$

- $\Phi(u,v) = (u+v, u-v-1)$ *per ogni* $(u,v) \in R^2$, *e* $|\det J_\Phi(u,v)| = 2$.
- $\Phi^{-1}(E)$, *è il triangolo con vertici* $(0,0)$, $(3,0)$ *e* $(3,1)$ *quindi*

$$\Phi^{-1}(E) = \{(u,v) \in R^2 : 0 \le u \le 3,\ 0 \le 3v \le u\}.$$

- *Applicando il Teorema*

$$I_1 \ = \int_{\Phi^{-1}(E)} 2uv\,dudv = 2\int_0^3 du\left(\int_0^{u/3} uvdv\right)$$

Cambiamento di variabili

Esempio

Calcolare

$$\int_E (x+y)\mathrm{e}^{2x-y}\, dxdy,$$

dove $E = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le 2x-y \le 2\}$.

- $(x,y) \to \Psi(x,y) = (x+y, 2x-y)$
- *La* Ψ *è invertibile su* R^2, *e la sua inversa* $\Psi^{-1} : R^2 \to R^2$ *ha come espressione*

$$\Psi^{-1}(u,v) = (\frac{u+v}{3}, \frac{2u-v}{3})$$

- $|\det J_{\Psi^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{3}$.
- $\Psi(E) = [0,1] \times [0,2]$,

allora utilizzando il Teorema del cambiamento di variabili si ottiene

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{[0,1]\times[0,2]} u\mathrm{e}^v\, dudv = \frac{1}{3}\int_0^1 u\ du \int_0^2 \mathrm{e}^v\ dv = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^2 - 1).$$

Cambiamento di variabili

Esempio

Calcoliamo

$$I_3 = \int_E \frac{2x}{y} e^{xy}\, dxdy,$$

dove

$$E = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le xy \le 2,\ 2y \le x \le 3y\} = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le xy \le 2,\ 2 \le x/y \le 3\}.$$

- $(x,y) \to (xy,\ x/y) = \Psi(x,y)$.
- $E \subset]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ *è limitato e misurabile (la frontiera si può parametrizzare con una curva* C^1 *a tratti).*
- $\Psi :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, *è invertibile*
- *L'inversa* Ψ^{-1} *è definita da* $\Psi^{-1}(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$ *per ogni* $u, v > 0$.

Cambiamento di variabili

Esempio (...continua...)

- $$J_\Psi(\psi^{-1}(u,v))J_{\Psi^{-1}}(u,v) = I,$$

  dove I indica la matrice identità. Pertanto,

  $$J_{\Psi^{-1}}(u,v) = (J_\Psi(\Psi^{-1}(u,v)))^{-1}, \qquad \textit{per ogni } (u,v) \in R^2$$

  e, quindi,

  $$|\det J_{\Psi^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{|\det J_\Psi(\Phi(u,v))|}, \qquad \textit{per ogni } (u,v) \in R^2.$$

  Poiché $J_\Psi(x,y) = -2x/y$ per ogni $x,y > 0$, è immediato concludere che $|\det J_{\Psi^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{2v}$ per ogni $u,v > 0$.

Pertanto, applicando il Teorema del cambio di variabile, (si osservi che $\Psi(E) = [1,2] \times [2,3]$)

$$I_3 = \int_{[1,2]\times[2,3]} \mathrm{e}^u du dv = \int_1^2 \mathrm{e}^u \, du \int_2^3 1 \, dv = (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}).$$

Coordinate polari

Osservazione (Importante)

Coordinate polari con centro (x_0, y_0),

$$(\rho, \theta) \to \Theta(\rho, \theta) = (x_0 + \rho\cos(\theta), y_0 + \rho\sin(\theta))$$

per ogni $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. *dove* $\Theta :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to R^2 \setminus \{(x, y_0) : x \geq x_0\}$
Si verifica che Θ *è biunivoca tra i due aperti*

$$\Omega =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\quad e \quad \Lambda = R^2 \setminus \{(x, y_0) : x \geq x_0\}.$$

Inoltre la matrice Jacobiana di Θ *è*

$$J_\Theta(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad per\ ogni\ (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,$$

e quindi $|\det J_\Theta(\rho, \theta)| = \rho$ *per ogni* $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$.

Coordinate polari

Esempio

Calcolare

$$\int_C x^2 y \, dxdy,$$

quando $C = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq 0\}$.

- $(\rho, \theta) \to \Theta(\rho, \theta) = (1 + \rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.
- $\Theta^{-1}(C) = [0, 1] \times [0, \pi]$.
- *L'insieme* $\Theta^{-1}(C)$ *(ovvero* C *in coordinate polari)* **non***è contenuto in* $\Omega =]0, +\infty[\times]0, \pi[$.
- *Ma, posto* $\hat{C} = C \setminus \{(x, 0) : x \in [0, 2]\}$, *si ha che* $\Phi^{-1}(C) =]0, 1[\times]0, \pi[$, *e* $m(C \setminus \hat{C}) = 0$, *in quanto* $C \setminus \hat{C} \subset \partial C$.

Possiamo quindi concludere che

$$\int_C x^2 y \, dxdy = \int_{\hat{C}} x^2 y \, dxdy = \int_{\Phi^{-1}(\hat{C})} \rho^2 (1 + \rho\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \, d\rho d\theta.$$

Cambiamento di variabili

Esempio

$$\begin{aligned}
\int_C x^2 y \, dxdy &= \int_{\Phi^{-1}(\hat{C})} \rho^2 (1+\rho\cos(\theta))^2 \sin(\theta)\, d\rho d\theta \\
&= \int_{]0,1[\times]0,\pi[} \rho^2 (1+\rho\cos(\theta))^2 \sin(\theta)\, d\rho d\theta \\
&= \int_{[0,1]\times[0,\pi]} \rho^2 (1+\rho\cos(\theta))^2 \sin(\theta)\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^\pi d\theta \left(\int_0^1 \rho^2 (1+\rho\cos(\theta))^2 \sin(\theta)\, d\rho \right) \\
&= \ldots \\
&= \tfrac{4}{5},
\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi $]0,1[\times]0,\pi[$ *e* $[0,1]\times[0,\pi]$ *differiscono per un insieme di misura nulla: la frontiera del rettangolo.*

Misura e integrazione in R^3

Definizione

Sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset R^3$ (misurabile). Denotiamo con $\rho : G \to R$ la densità di massa di C e supponiamo che sia una funzione continua. Allora il punto (x_G, y_G, z_G), dove

$$x_G = \frac{\int_G x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\int_G \rho(x,y,z)\,dxdydz}, \qquad y_G = \frac{\int_G y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\int_G \rho(x,y,z)\,dxdydy},$$

$$z_G = \frac{\int_G z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\int_G \rho(x,y,z)\,dxdydz},$$

si dice baricentro del corpo C
Nel caso in cui la densità sia costante, (x_G, y_G, z_G) sono dette coordinate del baricentro (geometrico) del corpo C.

Misura e integrazione in R^3

Esempio

Calcolarte il volume di

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}.$$

- *V è il sottografico di $f(x,y) = 1 - x - y$, definita su* $U = \Pi_{xy}(V) = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$
- *$U = \Pi_{xy}(V)$ è la proiezione di V sul piano $z = 0$.*

$$\begin{aligned} m(V) &= \int_U (1-x-y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 dx \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx \\ &= \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Misura e integrazione in R^3

Esempio (...continua...)

- *Si ha*

$$\int_U (1-x-y)\; dxdy = \int_U dxdy \int_0^{1-x-y} dz$$

- *quindi*

$$m(V) = \int_U dxdy \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) = \int_0^1 dx \left(\int_0^{1-x} dy \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) \right),$$

- *quindi (calcolo integrale triplo)=(tre integrali in una variabile).*
- *Poniamo* $T_x = \{(y,z) \in R^2 : 0 \le y \le x,\; 0 \le z \le 1-x-y\}$ *per ogni* $x \in [0,1]$,

$$m(T_x) = \int_{T_x} 1 dydz,$$

e quindi integriamo $m(T_x)$ *(che è una funzione di* x*) su* $[0,1]$, *otteniamo ancora* $1/6$.

Esempio (...continua...)

Pertanto

$$\int_V dxdydz = \int_0^1 dx \left(\int_{T_x} 1 dydz \right) = \int_0^1 dx \left(\int_0^x dy \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) \right). \tag{0.1}$$

Infine, se poniamo $T_y = \{(x,z) \in R^2 : 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le (1-x-y)\}$ *per ogni* $y \in [0,1]$, *otteniamo che*

$$\int_V dxdydz = \int_0^1 dy \left(\int_{T_y} dxdz \right) = \int_0^1 dy \left(\int_0^y dy \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) \right). \tag{0.2}$$

Misura e integrazione in R^3

Definizione

$E \subset R^3$ misurabile e limitato si dice dominio semplice rispetto all'asse x se esistono un intervallo I limitato e una famiglia $\{E_x\}_{x \in I}$ di sottoinsiemi misurabili di R^2 tali che

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 : x \in I,\ (y, z) \in E_x\}.$$

Per ogni $x_0 \in I$, l'insieme E_{x_0} è l'intersezione di E con il piano $x = x_0$, ovvero $E_{x_0} = E \cap \{x = x_0\}$. La definizione di dominio semplice rispetto agli assi y e z è perfettamente analoga.

Misura e integrazione in R^3

Esempio

Sia $E = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z > 0\}$. *Questo dominio è semplice*

- *rispetto all'asse* x *nella forma*

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : -2 \leq x \leq 2,\ (y,z) \in E_x\}$$

  dove

$$E_x = \{(y,z) \in R^2 : y^2 + z^2 \leq x^2,\ z > 0\};$$

- *rispetto all'asse* y *nella forma*

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : -2 \leq y \leq 2,\ (x,z) \in E_y\}$$

  dove

$$E_y = \{(x,z) \in R^2 : x^2 + z^2 \leq y^2,\ z > 0\};$$

- *rispetto all'asse* z *nella forma*

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : 0 \leq z \leq 2,\ (x,y) \in E_z\}$$

  dove

Enunciamo ora una prima versione del Teorema di riduzione in R^3.

Teorema (Integrazione per strati)

Sia $f : \Omega \subset R^3 \to R$ una funzione continua e limitata su un insieme Ω e sia $E \subseteq \Omega$ un dominio semplice rispetto all'asse x, ovvero

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 : a \leq x \leq b,\ (y, z) \in E_x\}.$$

Allora la funzione $U(x) = \int_{E_x} f(x, y, z)\, dydz$ è continua per ogni $x \in [a, b]$ e si ha

$$\int_E f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b U(x)\, dx.$$

Misura e integrazione in R^3

Definizione

Un insieme $E \subset R^3$ misurabile e limitato si dice normale rispetto al piano xy se la proiezione $V = \Pi_{xy}(E)$ sul piano xy è misurabile ed esistono due funzioni continue $a, b : V \to R$ con $a(x,y) \leq b(x,y)$ per ogni $(x,y) \in V$ tali che

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in V,\ a(x,y) \leq z \leq b(x,y)\}.$$

In modo del tutto analogo si definiscono i concetti di insieme normale rispetto al piano yz e rispetto al piano xz.

Misura e integrazione in R^3

Esempio

L'insieme $E = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$ *è normale rispetto al piano* xy*.*

- $\Pi_{xy}(E) = \overline{B(0, 0; 1)}$,
- *l'insieme* E *si può rappresentare*

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in \overline{B(0, 0; 1)},\ a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\},$$

- *le funzioni* $a, b : \Pi_{xy}(E) \to R$*, definite da* $a(x, y) = 0$ *e* $b(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *per ogni* $(x, y) \in \Pi_{xy}$*, sono continue e soddisfano la condizione* $a(x, y) \leq b(x, y)$ *per ogni* $(x, y) \in \Pi_{xy}$*.*

Misura e integrazione in R^3

Possiamo ora enunciare il secondo teorema di riduzione per integrali tripli.

Teorema (Integrazione per fili)

Se $f : \Omega \subset R^2 \to R$ *è una funzione continua e limitata definita in* Ω*, ed* $E \subset \Omega$ *un dominio normale rispetto al piano* xy*, ovvero*

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in \Pi_{xy}(E),\ a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\}.$$

allora $B(x, y) = \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x, y, z)\, dz$ *è continua per ogni* $(x, y) \in \Pi_{xy}(E)$ *e si ha*

$$\int_E f(x, y, z) dxdydz = \int_{\Pi_{xy}(E)} B(x, y) dxdy.$$

L'enunciato nel caso dominii normali rispetto al piano yz *o al piano* xz *è perfettamente analogo.*

Misura e integrazione in R^3

Teorema (Cambiamento di variabili negli integrali tripli)

Siano $\Omega, \Lambda \subset R^3$ *due aperti, e sia* $\Phi : \Omega \to \Lambda$ *una funzione biiettiva, di classe* C^1 *e tale che* $0 < |\det J_\Phi(u, v, w)| < +\infty$ *per ogni* $(u, v, w) \in \Omega$.
Se $f : E \to R$ *è una funzione continua e limitata definita sull'insieme misurabile* $E \subseteq \Lambda$, *allora*

$$\int_E f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u, v, w))\, |\det J_\Phi(u, v, w)|\, dudvdw.$$

Misura e integrazione in R^3

Osservazione (Importante)

Analogamente a quanto fatto per i sottoinsiemi di R^2, possiamo introdurre le coordinate polari nello spazio, dette anche coordinante sferiche, definite da

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} , \quad (\rho,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[.$$

Così come le coordinate polari in R^2 trasformano cerchi in rettangoli, le coordinate sferiche trasformano sfere in parallelepipedi.
La funzione Θ definita da

$$(\rho,\theta,\varphi) \mapsto \Theta(\rho,\theta,\varphi) := (x,y,z)$$

è biiettiva e di classe C^1 da $\Omega =]0,+\infty] \times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ a $\Lambda = R^3 \setminus \{(x,0,z) \in R^3 : x > 0\}$. Si ha che

$$|\det J_\Theta(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \sin(\varphi).$$

Vale anche in questo caso l'Osservazione **??**, *ovvero l'integrale non cambia se aggiungiamo o togliamo al dominio di integrazione l'insieme $\{(x,0,z) \in R^3 : x > 0\}$.*

Misura e integrazione in R^3

Esempio

Calcoliamo il volume della sfera $B = \overline{B(0,0,0;R)}$ *al variare di* $R > 0$. *Utilizzando le coordinate sferiche con centro nell'origine, otteniamo che*

$$\Theta^{-1}(B) = \{(\rho,\theta,\varphi) : 0 < \rho \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

ovvero $\Theta^{-1}(B)$ *è un parallelepipedo nello spazio delle variabili* (ρ,θ,φ). *Applicando il Teorema del cambiamento di variabili* **??** *ed il Teorema di riduzione* **??** *troviamo*

$$\begin{aligned}
\int_B 1\,dxdydz &= \int_{\Theta^{-1}(B)} |\det J_\Theta(\rho,\theta,\varphi)| \\
&= \int_{\Theta^{-1}(B)} \rho^2 \sin(\varphi)\,d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^{\pi} d\varphi \left(\int_0^R \rho^2 \sin(\varphi)\,d\rho\right)\right] \\
&= \dots \\
&= \tfrac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

Osservazione

Sono molto utili, ad esempio nell'integrazione per fili, le cosidette "coordinate cilindriche":

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad , \quad (\rho,\theta,z) \in \,]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times R.$$

La funzione $\Phi :]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times R \to R^3 \setminus \{(x,0,z) \in R^3 : x > 0\}$ *definita da*

$$\Phi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z), \qquad \textit{per ogni } (\rho,\theta,z) \in \,]0,+\infty[\,\times[0,2\pi[\,\times R,$$

risulta essere biiettiva e di classe C^1. *Inoltre si ha che* $|\det J_\Phi(\rho,\theta,z)| = \rho$.

Misura e integrazione in R^3

Esempio

Calcoliamo la misura della regione $V \subset R^3$ *delimitata dalle superficie*

$$S_1 : \ z = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad S_2 : \ z = 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{9}y^2.$$

L'intersezione tra le due superficie è la curva (non piana!)

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{9}y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases},$$

e la proiezione dell'insieme V *sul piano* $z = 0$ *è l'ellisse* $\Pi_{xy}(V) = \{(x, y) \in R^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. *Dunque l'insieme* V *si può rappresentare come dominio normale rispetto al piano* $z = 0$, *cioè*

$$V = \left\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in \Pi_{xy}(V), \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{9}y^2\right\}.$$

Misura e integrazione in R^3

Esempio

Passando a coordinate cilindriche (a sezione ellittica) attraverso la trasformazione

$$(\rho,\theta,z) \rightarrow (2\rho\cos(\theta),\, 3\rho\sin(\theta),\, z) = C(\rho,\theta,z) = (x,y,z),$$

troviamo che

$$\begin{aligned} U \; = \; C^{-1}(V) = \{(\rho,\theta,z) : 0 < \rho \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 4\rho^2 + 5\rho^2(\sin(\theta))^2 \leq z \leq 1 + 3\rho^2 + 5\rho^2(\sin(\theta))^2\}. \end{aligned}$$

Poiché $|\det J_C(\rho,\theta,z)| = 6\rho$, *per il Teorema del cambiamento di variabili* **??** *si ha*

$$\begin{aligned} m(V) \; &= \; \int_V dxdydz = \int_U 6\rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^1 d\rho \left(\int_{4\rho^2+5\rho^2(\sin(\theta))^2}^{1+3\rho^2+5\rho^2(\sin(\theta)^2)} 6\rho dz\right)\right] \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 6\rho(1-\rho^2)d\rho\right) \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$