

Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Marino Belloni

11 maggio 2009

Misura di Peano-Jordan

Vogliamo che la famiglia $\mathcal{M}$ dei misurabili di $\mathbb{R}^2$ e la funzione **misura** $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty[$ soddisfino

(P₁) Se R rettangolo e $]a, b[\times]c, d[\subseteq R \subseteq [a, b] \times [c, d]$, con $a < b$ e $c < d$, **allora**

- ▶ $R \in \mathcal{M}$
- ▶ $m(R) = (b - a)(d - c)$;

(P₂) Se $E \in \mathcal{M}$ **allora**

- ▶ $E + \{(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0, y - y_0) \in E\} \in \mathcal{M}$ per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
- ▶ $m(E + \{(x_0, y_0)\}) = m(E)$ (invarianza della misura per traslazioni);

(P₃) Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una rotazione ed $E \in \mathcal{M}$, **allora**

- ▶ $T(E) \in \mathcal{M}$
- ▶ $m(T(E)) = m(E)$ (invarianza della misura per rotazioni);

(P₄) Se $E_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, \dots, n$, tali che $E_i \cap E_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j = 1, \dots, n$, **allora**

- ▶ $E = \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}$
- ▶ $m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i)$;

(P₅) se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$, **allora** $m(A) \leq m(B)$.

Misura di Peano-Jordan

Un **plurirettangolo** $P = \bigcup_{i=1}^m R_i \in \mathcal{M}$, dove R_i ($i = 1, \dots, m$) sono rettangoli tali che $R_i \cap R_j \subset (\partial R_i \cap \partial R_j)$ per $i \neq j = 1, \dots, m$.

- l'unione finita di plurirettangoli è un plurirettangolo;
- l'intersezione finita di plurirettangoli è un plurirettangolo.

Definizione (Insieme misurabile)

Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **misurabile (secondo Peano-Jordan)** se $m^-(E) = m^+(E)$ dove

- $m^-(E) = \sup\{m(P) : P \text{ è un plurirettangolo contenuto in } E\}$,
- $m^+(E) = \inf\{m(P) : P \text{ è un plurirettangolo contenente } E\}$.

Si definisce **misura di E** il numero reale non negativo $m(E) := m^-(E) = m^+(E)$.

Osservazione

Dire che un insieme E è misurabile equivale a dire che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P_\varepsilon^-, P_\varepsilon^+ \text{ plurirettangoli, } P_\varepsilon^- \subset E \subset P_\varepsilon^+ \text{ t.c. } m(P_\varepsilon^+) - m(P_\varepsilon^-) < \varepsilon$$

Osservazione

Non tutti i sottoinsiemi di R^2 sono misurabili. Ad esempio

$$Q = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\},$$

non è misurabile in quanto

- *non contiene nessun plurirettangolo (e pertanto $m^-(E) = 0!$)*
- *però, essendo $\mathbb{Q}$ denso in R , il più piccolo prurirettangolo contenente Q è $[0, 1] \times [0, 1]$ (e quindi $m^+(E) = 1$).*

Questo esempio non ci deve far concludere che la definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan non sia valida: infatti si può provare che, per qualsiasi definizione "sensata" di misurabilità venga introdotta, esistono sempre insiemi non misurabili.

Esempio

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

il suo sottografico. Essendo la funzione integrabile secondo Riemann, per ogni ε trovo una suddivisione di $[a, b]$ e in corrispondenza questa trovo

- un prurintervallo incluso nel sottografico
- un prurintervallo che include il sottografico
- e la differenza tra la misure di questi plurintervalli è minore di ε .

Ne segue che il sottografico E è misurabile e si ha

$$m(E) = \int_a^b f(x) dx.$$

Misura di Peano-Jordan

Teorema

Se E, F sono insiemi misurabili, allora $E \cup F$, $E \cap F$ e $E \setminus F$ sono misurabili. Inoltre:

- (i) se $E \subset F$, allora $m(E) \leq m(F)$;
- (ii) $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$;
- (iii) se $E \cap F = \emptyset$, allora $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$;
- (iv) se E è misurabile, allora $\overline{E}$, $E \setminus \partial E$ sono misurabili e

$$m(E) = m(\overline{E}) = m(E \setminus \partial E).$$

Il teorema che segue è molto importante

Teorema

Sia E un limitato di $\mathbb{R}^2$. Allora

$$(E \text{ è misurabile}) \iff (\partial E \text{ è misurabile e } m(\partial E) = 0).$$

Corollario

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato la cui frontiera è il sostegno di una curva φ , regolare a tratti e C^1 a tratti. Allora $m(\partial E) = m(\varphi([a, b])) = 0$ e, quindi, E è misurabile.

Integrale secondo Riemann

Definizione

Siano E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$, k un numero intero e $E_1, \dots, E_k$ sottoinsiemi misurabili di E . L'insieme $\Delta = \{E_i : i = 1, \dots, k\}$ si dice **suddivisione di E** se

- $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$;
- $E_i \cap E_j \subseteq (\partial E_i \cap \partial E_j)$ per ogni $i \neq j = 1, \dots, k$.

Osservazione

Se E è un insieme limitato è facile costruire una sua suddivisione. Preso ad esempio un plirettangolo $P = \bigcup_{i=1}^k R_i$ contenente E (tale plirettangolo esiste se E è limitato, perché?), basta porre $\Delta = \{E_i = E \cap R_i : i = 1, \dots, k\}$.

Integrale secondo Riemann

- Sia E un insieme misurabile e limitato.
- Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
- Sia Δ una suddivisione dell'insieme misurabile E .

Definiamo

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^k \left(\inf_{(x,y) \in R_i} f(x, y) \right) m(E_i),$$

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^k \left(\sup_{(x,y) \in R_i} f(x, y) \right) m(E_i).$$

- f è limitata,
- allora $\inf_{(x,y) \in R_i} f(x, y), \sup_{(x,y) \in R_i} f(x, y) \in \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$
- Allora $s(f, \Delta), S(f, \Delta) \in \mathbb{R}$ sono numeri reali.

Integrazione secondo Riemann

Definizione

Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, con $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. f si dice *integrabile (su E)* se, posto

$$s(f) := \sup\{s(f, \Delta) : \Delta \text{ è una suddivisione di } E\},$$

$$S(f) := \inf\{S(f, \Delta) : \Delta \text{ è una suddivisione di } E\},$$

si ha $s(f) = S(f)$. In tal caso il numero reale

$$\int_E f(x, y) \, dx dy := s(f) = S(f)$$

è detto *integrale della funzione f sull'insieme E* .

Integrazione secondo Riemann

Osservazione

Dalla definizione segue

(i) preso $E \in \mathcal{M}$, la funzione

$$\mathcal{I}_E(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile, e si ha

$$m(E) = \int_E \mathcal{I} \, dx dy.$$

(ii) se $m(E) = 0$, allora ogni funzione limitata $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su E e

$$\int_E f(x, y) \, dx dy = 0.$$

Integrazione secondo Riemann

Teorema

Se

- $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile,
- $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili
- $\lambda \in \mathbb{R}$.

allora

(i) $f + g$ è integrabile su E e

$$\int_E (f(x, y) + g(x, y)) \, dx dy = \int_E f(x, y) \, dx dy + \int_E g(x, y) \, dx dy;$$

(ii) λf è integrabile su E e

$$\int_E \lambda f(x, y) \, dx dy = \lambda \int_E f(x, y) \, dx dy.$$

Teorema

Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora f è integrabile su E .

Integrazione secondo Riemann

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Valgono le seguenti proprietà:

(i) se $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in E$, allora

$$\int_E f(x, y) \, dx dy \leq \int_E g(x, y) \, dx dy.$$

(ii) $|f|$ è integrabile in E e

$$\left| \int_E f(x, y) \, dx dy \right| \leq \int_E |f(x, y)| \, dx dy.$$

(iii) Se $F, G \subset E$ misurabili, t.c. $m(F \cap G) = 0$, allora

$$\int_{F \cup G} f(x, y) \, dx dy = \int_F f(x, y) \, dx dy + \int_G f(x, y) \, dx dy.$$

(iv) Se $F, G \subset E$ misurabili, t.c. $G \subset F$, allora

$$\int_{F \setminus G} f(x, y) \, dx dy = \int_F f(x, y) \, dx dy - \int_G f(x, y) \, dx dy.$$

Integrazione secondo Riemann

Sia $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ continua, e sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Allora

$$m(E) = \int_a^b f(x) dx.$$

Ma si sa che

$$m(E) = \int_E \mathcal{I}_E \, dx dy,$$

dunque

$$\int_E 1 dx dy = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} 1 dy,$$

Il calcolo dell'integrale doppio è stato ricondotto al calcolo di due integrali di funzioni di una sola variabile.

Integrazione secondo Riemann

Definizione

$E \subset \mathbb{R}^2$ si dice *dominio normale rispetto all'asse x* se esistono due funzioni continue $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, tali che

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\}.$$

Definizione

Un insieme $F \subset \mathbb{R}^2$ si dice *dominio normale rispetto all'asse y* se esistono due funzioni continue $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, con $\gamma(y) \leq \delta(y)$ per ogni $y \in [c, d]$, tali che

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \right\}.$$

Osservazione

- Nel caso in cui le funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono di classe C^1 , si ha che la frontiera di questi insiemi ha misura nulla e dunque gli insiemi sono misurabili
- ma si dimostra che i domini normali sono misurabili anche quando le funzioni sono continue.

Integrazione secondo Riemann

Esempio

- (i) *L'insieme limitato E , compreso tra le parabole $y = 10x^2$ e $y = 1 + x^2$, è un dominio normale rispetto all'asse x .*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

ovvero

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], 10x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Questo insieme non è normale rispetto all'asse y !!!

- (ii) *L'insieme limitato F compreso tra le curve $x = y^2$ e $x = |y|$ è un dominio normale rispetto all'asse y .*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

ovvero

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], y^2 \leq x \leq |y|\}$$

Questo insieme non è normale rispetto all'asse x !!!

Esempio (...continua...)

- (iii) *L'insieme $C = [-1, 2[\times [1, 1]$ è normale rispetto ad entrambi gli assi.*
- (iv) *Il triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 0)$ è normale rispetto ad entrambi gli assi.*
- ▶ *T è delimitato dalle tre rette $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - \frac{x}{2}$,*
 - ▶ *T è normale rispetto all'asse x*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

- ▶ *T è normale rispetto all'asse y*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq 2 - 2y\}.$$

Integrazione secondo Riemann

Teorema (Teorema di riduzione)

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua definita su Ω misurabile.

(i) Se $A \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse x ,

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\},$$

allora

- ▶ la funzione $x \mapsto U(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ è continua in $[a, b]$
- ▶ inoltre si ha

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b U(x) dx = \int_a^b dx \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right);$$

Teorema (...continua...)

(ii) Se $B \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse y ,

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \right\},$$

allora

- ▶ la funzione $y \mapsto V(y) = \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$ è continua in $[c, d]$
- ▶ inoltre si ha

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d V(y) dy = \int_c^d dy \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right).$$

Integrazione secondo Riemann

Esempio

Calcoliamo

$$\int_R f(x, y) \, dx dy,$$

dove $f(x, y) = 3x$ e $R = [0, 1] \times [0, 3]$.

- R è un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi
- f è continua e limitata in R .
- Per il Teorema di riduzione otteniamo

$$\int_R 3x \, dx dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^3 3x \, dy \right) = \int_0^1 [3xy]_{y=0}^{y=3} dx = \int_0^1 9x \, dx = \frac{9}{2}.$$

- naturalmente si poteva anche

$$\int_R 3x \, dx dy = \int_0^3 dy \left(\int_0^1 3x \, dx \right) = \int_0^3 \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^3 \frac{3}{2} dy = \frac{9}{2}.$$

Integrazione secondo Riemann

Esempio

Calcoliamo

$$\int_S f(x, y) \, dx dy,$$

dove $f(x, y) = xy$ e S è l'insieme delimitato dalle curve $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.
 S è un dominio normale rispetto all'asse x . Infatti

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}.$$

f è continua e limitata su S .

Per il Teorema di riduzione si trova, per ogni $x \in [-1, 2]$.

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{x^2-1}^{x+1} xy \, dy = x \int_{x^2-1}^{x+1} y \, dy \\ &= x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2-1}^{y=x+1} = \frac{1}{2} (2x^2 + 3x^3 - x^5), \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_S xy \, dx dy = \int_{-1}^2 U(x) \, dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{2} (2x^2 + 3x^3 - x^5) \, dx = \dots = \frac{27}{8}.$$

Integrazione secondo Riemann

Definizione

Sia C un corpo materiale che occupa una regione $G \subset \mathbb{R}^2$ (misurabile). Sia $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$, continua, la densità di massa di C . Allora il punto (x_G, y_G) , dove

$$x_G = \frac{\int_G x \rho(x, y) \, dx dy}{\int_G \rho(x, y) \, dx dy}, \quad y_G = \frac{\int_G y \rho(x, y) \, dx dy}{\int_G \rho(x, y) \, dx dy},$$

si dice *baricentro del corpo* C

Quando $\rho = \text{cost.}$

$$x_G = \frac{1}{m(G)} \int_G x \, dx dy, \quad y_G = \frac{1}{m(G)} \int_G y \, dx dy,$$

sono dette *coordinate del baricentro (geometrico) del corpo* C .

Integrazione secondo Riemann

Osservazione (Proprietà del baricentro)

- (i) Se E e F sono misurabili con $E \cap F = \emptyset$, allora le coordinate (x_C, y_C) del baricentro geometrico di $C = E \cup F$ sono

$$\begin{cases} x_C = \frac{m(E)x_E + m(F)x_F}{m(E) + m(F)}, \\ y_C = \frac{m(E)y_E + m(F)y_F}{m(E) + m(F)}, \end{cases}$$

dove (x_E, y_E) e (x_F, y_F) denotano le coordinate del baricentro di E ed F .

- (ii) Siano E e F due insiemi misurabili tali che $E \subset F$, e supponiamo $C := F \setminus E \neq \emptyset$. Allora le coordinate del baricentro di C sono

$$\begin{cases} x_C = \frac{m(F)x_F - m(E)x_E}{m(F) - m(E)}, \\ y_C = \frac{m(F)y_F - m(E)y_E}{m(F) - m(E)}, \end{cases}$$

dove (x_E, y_E) e (x_F, y_F) denotano le coordinate dei baricentri di E e F .

Osservazione

- Se E possiede un asse di simmetria r (ovvero esiste una retta r tale che, per ogni punto $P \in E$, il suo simmetrico rispetto ad r appartiene ancora ad E), allora il baricentro geometrico di E appartiene a tale asse.
- Se E
 - ▶ è convesso
 - ▶ ammette punti interni,allora il suo baricentro geometrico (x_E, y_E) cade all'interno di E .

Integrazione secondo Riemann

Esempio

Calcoliamo il baricentro di

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

C è un dominio normale rispetto all'asse x

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\},$$

Applicando il Teorema di riduzione

$$\begin{aligned} m(C) &= \int_C 1 \, dx dy = \int_0^2 dx \left(\int_0^{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} 1 \, dy \right) \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 - (x - 1)^2} \, dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

(e la cosa non sorprende!!!)

Integrazione secondo Riemann

Esempio (...continua...)

Calcoliamo $\int_C x \, dx dy$. C è normale anche rispetto all'asse y , e quindi

$$\begin{aligned}\int_C x \, dx dy &= \int_0^1 dy \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x dx \right) = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=1+\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-y^2} dy = \dots = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

si è sfruttata la rappresentazione

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 1 - \sqrt{1+y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1+y^2}\}$$

e quindi $x_C = \left(\frac{\pi}{2}\right) / \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Analogamente

$$\int_C y \, dx dy = \int_0^2 dx \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y dy \right) = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - (x-1)^2 \right) dx = \frac{2}{3},$$

e quindi $y_C = \left(\frac{2}{3}\right) / \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3\pi}$.

Integrazione secondo Riemann

Esempio

Calcoliamo il baricentro del triangolo T di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,0)$.

T è normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y , e si ha

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1 - y/2\}. \end{aligned}$$

Utilizzando il Teorema di riduzione

$$\int_T \mathcal{I}_T \, dx dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{2-2x} \mathcal{I}_T \, dy \right) = \int_0^1 (2 - 2x) \, dx = 1,$$

$$\int_T x \, dx dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{2-2x} x \, dy \right) = \int_0^1 (2x - 2x^2) \, dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_T y \, dx dy = \int_0^2 dy \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} y \, dx \right) = \int_0^2 \left(y - \frac{1}{2} y^2 \right) \, dy = \frac{2}{3}.$$

Le coordinate del baricentro geometrico di T sono quindi $(x_T, y_T) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.