Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Marino Belloni

27 aprile 2009

Equazioni differenziali-generalità

Un'equazione differenziale di ordine n è una "relazione funzionale" che lega la funzione incognita y alle sue derivate fino all'ordine n, ovvero

$$f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0,$$

Definizione

Siano $I \subseteq R$ e $f : \Omega \subseteq R^{n+1} \to R$ dati. Una funzione $y : I \to R$, si dice `soluzione` *dell'equazione differenziale se*

1. *per ogni $x \in I$ $(x, y(x)) \in \Omega$;*
2. *$y \in C^n(I; R)$;*
3. *$f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0$, per ogni $x \in I$.*

Equazioni differenziali-generalità

Definizione (Problema di Cauchy)

Sia $f : \Omega \subseteq R^{n+1} \to R$. *Per ogni* $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$*, il problema*

$$\begin{cases} f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \quad \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

si dice `problema di Cauchy` *associato all'ODE* $f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0$.

Equazioni differenziali-generalità

Esempio (Decadimento radioattivo e datazione C^{14})

Il neutrone non è stabile: si disintegra in un protone, un elettrone e un neutrino.

- $N(t)$: *numero dei neutroni al tempo* t,
- k : *la probabilità che un neutrone si disintegri in un secondo, allora*
$$N'(t) = -kN(t),$$
- *Le soluzioni sono date da*
$$N(t) = c\mathrm{e}^{-kt}, \quad \text{al variare di } c \in R.$$
- *La soluzione dipende da* c*: per conoscere* $N(T)$ *si deve conoscere* $N(t_0)$ *per qualche valore* $t_0 \neq T$.
- $c = N(0)$, *ovvero* $c =$*numero di neutroni al tempo* $t = 0$.

Equazioni differenziali-generalità

Esempio (...continua...)

Il carbonio C^{14} *è un isotopo radioattivo del carbonio che si disintegra (decade) così*

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-kt}, \quad \textit{per ogni } t > 0.$$

Vogliamo scoprire da quanto tempo è stato tagliato un certo albero.

- *Un albero contiene una percentuale* $P(0)$ *– il dato iniziale – nota di* C^{14} *pari a quella dell'aria, quindi costante.*
- *L'albero tagliato non assorbe più nuovi atomi, e il* C^{14} *interno decade secondo la legge esponenziale.*
- *Si ottiene*

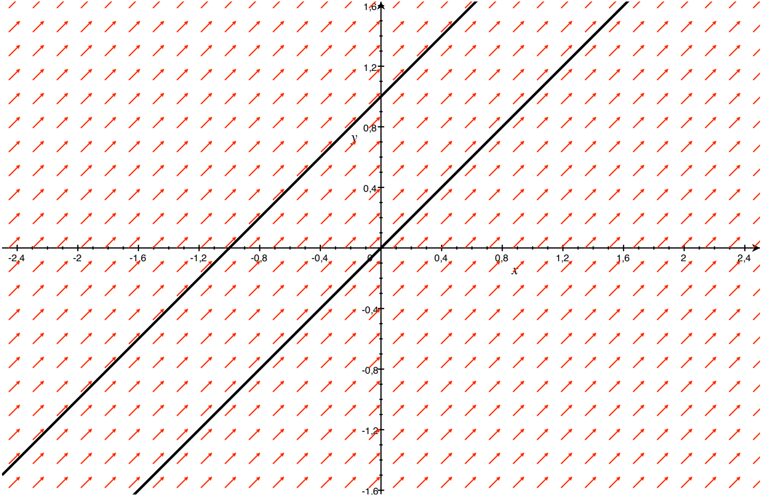
  $$P(t) = P(0)\mathrm{e}^{-kt}, \quad \textit{per ogni } t > 0.$$

  dove $P(t)$ *è la percentuale di* C^{14} *sul totale degli atomi di carbonio*
- k *la costante di decadimento dato sperimentale*
- *misuro* $P(T)$ *il livello attuale e calcolo* T*, il tempo intercorso per passare da* $P(0)$ *al livello attuale*

  $$T = \frac{1}{k} \log\left(\frac{P(0)}{P(T)}\right).$$

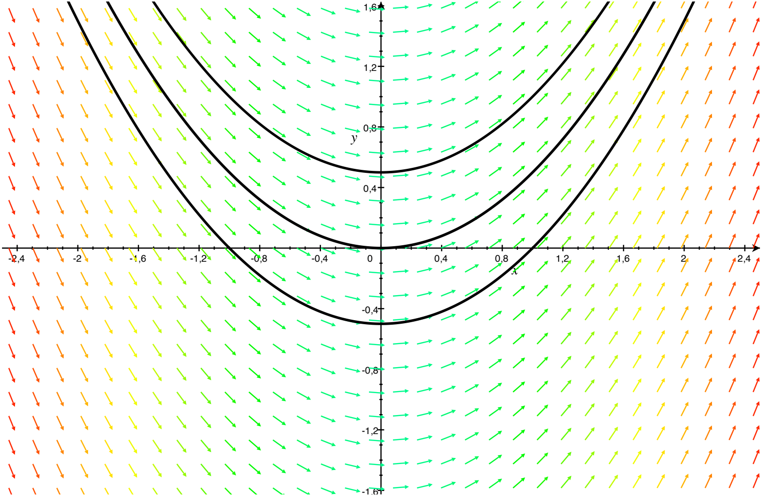
Equazioni differenziali-generalità

L'equazione differenziale $y' = 1$ produce il campo vettoriale $(x, y) \mapsto (1, 1)$; inoltre le soluzioni sono $y(x) = x + c$, con $c \in R$ costante arbitraria.



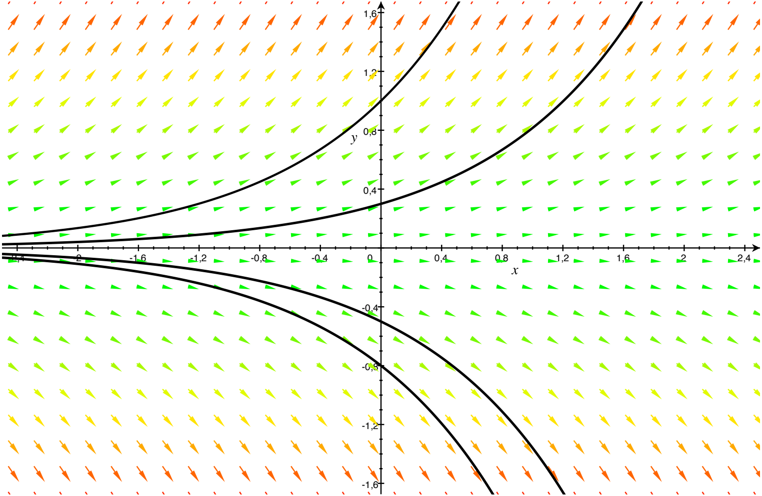
Equazioni differenziali-generalità

L'equazione differenziale $y' = x$ produce il campo vettoriale $(x, y) \mapsto (1, x)$; inoltre le soluzioni sono $y(x) = \frac{x^2}{2} + c$, con $c \in R$ costante arbitraria.



Equazioni differenziali-generalità

L'equazione differenziale $y' = y$ produce il campo vettoriale $(x, y) \mapsto (1, y)$; inoltre le soluzioni sono $y(x) = ce^x$, con $c \in R$ costante arbitraria.



Equazioni differenziali-generalità

Esempio (Corpo soggetto ad una forza elastica)

- *Data un molla fissata ad un estremo;*
- *all'estremo libero è fissato un corpo di massa m.*
- *quando la molla è a riposo, il corpo si trova in equilibrio nell'origine*
- *la molla sta sull'asse* x, *e* $x(t)$ *sia la posizione del corpo al tempo* t;
  - $x(t) > 0$ *quando la molla è allungata*
  - $x(t) < 0$ *quando la molla è compressa*
- *la forza* F *esercitata dalla molla è, in modulo, proporzionale al suo allungamento (compressione)* $x(t)$ *secondo una costante* $k > 0$, *detta costante di rigidità*
- *la direzione della forza è secondo l'asse* x,
- *l'orientazione di* F *è sempre verso la posizione di equilibrio, cioè*
  - *è positiva quando la molla è compressa;*
  - *è negativa quando la molla è allungata.*

Per questo motivo viene anche detta forza di richiamo.

Equazioni differenziali-generalità

Esempio (...continua...)

Dunque

$$F(t) = -kx(t)$$

e l'equazione della dinamica associata è

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Se ora si risolve questa equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine si trovano, le infinite soluzioni che dipendono da due costanti arbitrarie:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right), \quad c_1, c_2 \in R.$$

È semplice verificare che se le condizioni iniziali sono:

- $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, *allora la (unica!) soluzione è* $x(t) = 0$ *per ogni* t, *ovvero la posizione di equilibrio*
- $x(0) = x_0 > 0$ *e* $x'(0) = 0$, *ovvero il corpo sta in* x_0 *con velocità nulla, la (unica!) soluzione è* $x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$. *È fisicamente ragionevole: per* $t > 0$ *sufficientemente piccolo, il corpo si muove verso l'origine dell'asse* x.

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = a(x)g(y),$$

dove $a : I \longrightarrow R$ ed $g : J \longrightarrow R$ sono funzioni continue, ed I e J degli intervalli. g viene supposta di classe $C^1(J)$.
Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)g(y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

nelle ipotesi sopracitate ha una ed una sola soluzione $y : U \subset I \rightarrow J$ per ogni $(x_0, y_0) \in I \times J$, ed U è un intorno di x_0 (in generale non è definita in tutto I).

Equazioni differenziali a variabili separabili

1. Se $g(y_0) = 0$, $y(x) \equiv y_0$ è l'unica soluzione per ogni $x \in I$, detta soluzione costante (stazionaria).
2. Se $g(y_0) \neq 0$, allora $\hat{y} : A \to J$, $\hat{y}(0) = y_0$, è t.c. $g(\hat{y}(x)) \neq 0$ per ogni $x \in A$. Infatti i grafici di due soluzioni distinte non si possono mai intersecare, per l'unicità .
3. Sia ora W il più grande intervallo aperto contenente y_0 in cui $g \neq 0$. In W, $1/g$ è ben definita e continua. Quindi
$$\Phi(u) = \int_{y_0}^{u} \frac{dz}{g(z)}, \qquad \text{per ogni } u \in W,$$
è ben definita, continua, strettamente monotona e, quindi, invertibile in W.
4. si ottiene
$$\frac{\hat{y}'(x)}{g(\hat{y}(x))} = a(x).$$
5. $\hat{y}(x) \in W$ per ogni $x \in A$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,
$$(\Phi(\hat{y}))' = \frac{\hat{y}'}{g(\hat{y})}, \qquad \text{in ogni punto di } A.$$
6. Quindi $\hat{y}$ è soluzione di se, e solo se, è soluzione di
$$(\Phi(\hat{y}))'(x) = a(x).$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

1. Quindi $\hat{y}$ è soluzione di se, e solo se, è soluzione di

$$(\Phi(\hat{y}))'(x) = a(x).$$

2. Integrando da x_0 a x otteniamo

$$\Phi(\hat{y}(x)) = \Phi(y_0) + \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds.$$

3. $\Phi : W \to \Phi(W)$ è invertibile. Pertanto per ogni $x \in Z := \left\{x \in I : \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds \in \Phi(W)\right\}$, si ottiene

$$\hat{y}(x) = \Phi^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds\right), \quad \text{per ogni } x \in Z.$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Vogliamo determinare l'integrale generale (l'insieme di tutte le soluzioni) di un'equazione differenziale a variabili separabili.

Esempio

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = y(y-1)(x-1).$$

1. $f(x,y) = a(x)b(y) = [x-1][y(y-1)]$ *per ogni* $(x,y) \in R^2$*. Quindi la funzione* f *è di classe* C^1 *in* R^2*. e vale il teorema di esistenza e unicità .*
2. *Le soluzioni costanti/stazionarie di* $b(y) = 0$ *sono* $y_1 \equiv 0$ *e* $y_2 \equiv 1$*.*
3. *Sia* y *non stazionaria. Separando le variabili, si ottiene*

$$\frac{1}{y(x)(y(x)-1)} = \frac{1}{y(x)-1} - \frac{1}{y(x)} = x-1$$

da cui segue

$$\left(\log\left|\frac{y-1}{y}\right|\right)'(x) = x-1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}-x\right), \Longrightarrow \log\left(\frac{|y(x)-1|}{|y(x)|}\right) = \frac{x^2}{2} - x + c,$$

dove $c \in R$ *è una costante arbitraria.*

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

1. *La funzione logaritmo è invertibile su tutto R, quindi si ottiene*

$$\frac{|y(x)-1|}{|y(x)|} = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x},$$

   dove $C = \mathrm{e}^c$ è un arbitraria costante positiva.

2. *Dobbiamo eliminare i moduli per esplicitare y.* **Il piano R^2 è diviso in 3 regioni dalle soluzioni costanti** $y(x) = 0, 1$.

3. *I grafici di due soluzioni distinte di $y' = (x-1)y(y-1)$ non si intersecano quindi*
   - *se $y(x_0) > 1$ per qualche x_0, allora $y(x) > 1$ per ogni x nel dominio di y e quindi,*
   $$\frac{|y(x)-1|}{|y(x)|} = \frac{y(x)-1}{y(x)},$$
   - *se $y(x_0) \in]0,1[$ per qualche x_0, allora $y(x) \in]0,1[$ per ogni x nel dominio di y e quindi,*
   $$\frac{|y(x)-1|}{|y(x)|} = \frac{1-y(x)}{y(x)},$$
   - *se $y(x_0) < 0$ per qualche x_0, allora $y(x) < 0$ per ogni x nel dominio di y e quindi,*
   $$\frac{|y(x)-1|}{|y(x)|} = \frac{y(x)-1}{y(x)}.$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

1. *se* $y(x) > 1$ *o* $y(x) < 0$ *per ogni* x *allora*

$$\frac{y(x)-1}{y(x)} = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x} \Longrightarrow y(x) = \left(1 - C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x}\right)^{-1},$$

   con dominio di definizione (massimale)

$$I = \left\{x \in R : 1 - C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x} \neq 0\right\} = \left\{x \in R : \frac{x^2}{2} - x \neq -\log(C)\right\}.$$

2. *Invece se* $y(x) \in]0,1[$ *per ogni* x *allora*

$$\frac{1-y(x)}{y(x)} = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x} \Longrightarrow y(x) = \left(1 + C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x}\right)^{-1},$$

   il cui dominio di definizione (massimale) è tutto R.

3. *Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è l'insieme*

$$\left\{y \equiv 0;\ y(x) = \frac{1}{1 - C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}-x}},\ C \in R\right\}.$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Osservazione

Nell'esempio precedente $f(x) = a(x)g(y)$ *è definita e regolare su tutto* R^2*, ma*

- *la funzione*
$$y(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}}\right)^{-1},$$
che si ottiene prendendo $C = \mathrm{e}^{-3/2}$*, è definita in*
$$I = \left\{x \in R : \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} \neq 0\right\} = \{x \in R : x \neq -1, 3\}.$$
- *la funzione*
$$\widehat{y}(x) = \left(1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2} - x - 1}\right)^{-1},$$
che si ottiene prendendo $C = -\mathrm{e}^{-1}$*, è definita in tutto* R

Equazioni differenziali a variabili separabili

Osservazione (Importante)

Le equazioni della forma

$$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma), \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R},\ \alpha, \beta \neq 0),$$

non sono a variabili separabili,ma si possono facilmente ricondurre a tale forma. Infatti, y *è soluzionese, e solo se,la funzione* $z(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$*è soluzione dell'equazione a variabili separabili*

$$z' = \alpha + \beta f(z).$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \mathrm{e}^{x+2y} - \frac{1}{2}.$$

1. *se si pone* $z(x) = x + 2y(x)$ *allora*

$$\left(z'(x) = 1 + 2y'(x) \quad \& \quad y'(x) = \mathrm{e}^{z(x)} - \frac{1}{2} \right) \Longrightarrow z' = 2\mathrm{e}^{z}.$$

2. *Tutte le soluzioni sono definite da*

$$-\mathrm{e}^{-z(x)} = 2x + c \Longrightarrow z(x) = -\log(-2x - c)$$

al variare di $c \in R$, *con dominio* $I_c =]-\infty, -\frac{c}{2}[$.

3. *L'integrale generale di è quindi costituito dalle funzioni*

$$y(x) = -\frac{1}{2}\log(-2x - c) - \frac{x}{2}, \qquad \text{per ogni } x \in I_c,$$

al variare di $c \in R$.

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{1-y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. *il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione in un intorno di* $x = 0$.
   1. *L'ODE è a variabili separabili,*
   2. $a(x) = x$ *e* $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ *sono derivabili infinite volte rispettivamente in* $\mathbf{R}$ *e in* $]-1, 1[$.
2. *soluzioni stazionarie:* $y \equiv 1$ *e* $y \equiv -1$
3. *la soluzione del problema proposto è definita implicitamente dalla relazione*

$$\arcsin(y(x)) = \frac{x^2}{2}.$$

4. $x \mapsto \arcsin(x)$ *ha per immagine* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *quindi il dominio di* y *sono gli* x *tali che* $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} < \frac{\pi}{2}$, *cioè* $I =]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$
5. $y(x) = \sin(\frac{x^2}{2})$ *per ogni* $x \in I$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

Determiniamo tutte le soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) = (x + y(x))^2 - x - y(x) - 1.$$

1. *In questo caso si opera la trasformazione* $z(x) = x + y(x)$ *e si ottiene*

   $$z' = 1 + y' = 1 + [z^2 - z - 1]$$

   e quindi si arriva a $z' = z^2 - z$, *che è a variabili separabili*
2. *soluzioni stazionarie* $z_1(x) = 0$ *e* $z_2(x) = 1$, *che corrispondono a* $y_1(x) = -x$ *e* $y_2(x) = -x + 1$.
3. *L'ODE* $z' = z^2 - z$ *è a variabili separabili, e si ha*

   $$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = 1$$

   da cui si ottiene ($C \in R$ *costante positiva)*

   $$\log\left(\left|\frac{z}{z-1}\right|\right)'(x) = (x)' \Longrightarrow \left|\frac{z}{z-1}\right|(x) = Ce^x$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Esempio

1. *ma si ha quindi che, se si ammette che $c \in R$ possa essere anche negativa*

$$\frac{z}{z-1}(x) = ce^x$$

2. *e quindi tutte le soluzioni sono date da*

$$y(x) = -x \qquad \cup \qquad y(x) = -x + \frac{1}{1+ce^x}$$

al variare di $c \in R$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio

Determiniamo tutte le soluzione dell'equazione differenziale in $x > 0, y > 0$ *data da*

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} \log\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

1. *In questo caso si opera la trasformazione* $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ *e si ottiene*

$$z' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x[z \log z] - zx}{x^2}$$

   e quindi si arriva a $z' = \frac{z}{x}(\log z - 1)$, *che è a variabili separabili*

2. *soluzioni stazionarie* $z_1(x) = 0$ *e* $z_2(x) = 1$, *che corrispondono a* $y_1(x) = o$ *e* $y_2(x) = x$ *e sono definite quandox* > 0.
3. *L'ODE* $z' = \frac{z}{x}(\log z - 1)$ *è a variabili separabili, e si ha*

$$\frac{1}{z(\log z - 1)} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \log\left(|\log z - 1|\right)'(x) = (\log |x|)'$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Esempio

1. *quindi, al variare di* $c \in R$, $c > 0$

$$\log(|\log z - 1|)(x) = (\log(c|x|))$$

2. *al variare di* $c \in R$, $c > 0$

$$|\log z - 1| = c|x|$$

3. *al variare di* $k \in R$

$$\log z - 1 = kx$$

4. *al variare di* $k \in R$

$$z = 1 + e^{kx}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono della forma

$$y' = a(x)y + b(x),$$

con $a, b : I \to R$ funzioni continue in un intervallo $I \subset R$.

Sono dette lineari perché

- se y_1 e y_2 sono due soluzioni dell'equazione omogenea associata $y'(x) = a(x)y(x)$, allora
- per ogni $c_1, c_2 \in R$ la funzione $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ è soluzione di tale equazione.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Fattore integrante

Vogliamo determinare le soluzioni di

$$y' = a(x)y + b(x),$$

1. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$.
2. Moltiplicando ambo i membri per $\mathrm{e}^{-A(x)}$ otteniamo

   $$y'\mathrm{e}^{-A(x)} = a(x)y\mathrm{e}^{-A(x)} + b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}, \qquad \text{per ogni } x \in I,$$

   o, equivalentemente,

   $$\left(y\mathrm{e}^{-A(x)}\right)' = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}, \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

3. Integrando ambo i membri e moltiplicando poi per $\mathrm{e}^{A(x)}$ si ottiene

   $$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left(\int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,dx\right), \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Fissato $x_0 \in I$, la soluzione è

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} b(t) \mathrm{e}^{-A(t)}\, dt \right), \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

dove $c \in R$ è una costante arbitraria.

1. Si considera $y' = a(x)y$ –l'omogenea associata– che è a variabili separabili.
2. L'integrale generale dell'omogenea associata è
$$y_o(x) = c\mathrm{e}^{A(x)}, \quad \text{per ogni } x \in I,$$
al variare di $c \in R$.
3. Si cerca una soluzione dell'ODE "completa" della forma
$$v(x) = c(x)\mathrm{e}^{A(x)}, \qquad \text{per ogni } x \in I,$$
4. Derivando v e imponendo che sia soluzione dell'ODE completa, otteniamo:
$$c'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + c(x)a(x)\mathrm{e}^{A(x)} = a(x)c(x)\mathrm{e}^{A(x)} + b(x),$$
per ogni $x \in I$.
5. Quindi semplificando e integrando si ricava
$$c(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,dx.$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

1. Fissato $x_0 \in I$, una soluzione della completa(la soluzione particolare)è

$$\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\, dx, \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

2. Ora, la soluzione più generale della completa si ottiene sommando a $\overline{y}$ la più generale soluzione dell'equazione omogenea $y' = a(x)y$, ovvero

$$y_g(x) = y_o(x) + \overline{y}(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\, dt \right), \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

dove $c \in R$ è una costante arbitraria

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

L'ultima affermazione merita un chiarimento:
s'è detto che l'integrale generale dell'equazione omogenea sommato ad una soluzione particolare dell'eq. completa coincide con L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA
ovvero che tutte le soluzioni di $y' = a(x)y + b(x)$ sono della forma

$$y_g(x) = y_o(x) + \overline{y}(x)$$

dove

1. y_o è la totalità delle soluzioni dell'eq. omogenea $y' = a(x)y$
2. $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione completa $y' = a(x)y + b(x)$

Per provare questo, è sufficiente osservare che presa $y(x)$ soluzione dell'equazione completa $y' = a(x)y + b(x)$, si ha che $v(x) = y(x) - \overline{y}(x)$ è soluzione dell'omogenea infatti

$$\begin{aligned} v'(x) &= y'(x) - \overline{y}'(x) \\ &= a(x)y(x) + b(x) - a(x)\overline{y}(x) - b(x) \\ &= a(x)(y(x) - \overline{y}(x)) \\ &= a(x)v(x) \end{aligned}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Osservazione (Importante)

A differenza delle soluzioni delle equazioni a variabili separabili, le soluzioni delle equazioni differenziali lineari (del primo ordine) sono definite in tutto l'intervallo I dove le funzioni a e b risultano continue.

Osservazione (Importante)

Come si verifica immediatamente, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

è data da

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds}\,dt\right), \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Esempio

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\tan(x))y + \sin(2x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. *In* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *ci sta* $x = 0$ *e ivi* $a(x) = \tan(x)$ *e* $b(x) = \sin(2x)$ *sono continui*
2. *si ha*
$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = -\int_0^x \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\log(\cos(x)).$$
3. *Inoltre*
$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^x b(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)\,ds\right)dt &= \textstyle\int_0^x \sin(2t)\cos(t)\,dt = 2\int_0^x \sin(t)(\cos(t))^2 dt \\ &= -\tfrac{2}{3}(\cos(x))^3 + \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$
4. *La soluzione è*
$$y(x) = \frac{2}{3\cos(x)} - \frac{2}{3}(\cos(x))^2, \qquad \textit{per ogni } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Equazioni di Bernoulli

Le equazioni di Bernoulli sono equazioni nonlineari della forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha},$$

dove i coefficienti $a, b : I \subseteq R \to R$ sono funzioni continue nell'intervallo aperto I, mentre α è una costante reale diversa da 0 e 1.
Quando $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, l'equazione è un'equazione differenziale lineare.
La funzione $f(x, y) = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$ è continua in $I \times]0, +\infty[$ ed ammette derivata parziale rispetto alla variabile y, continua in $I \times]0, +\infty[$.
Questo ci dice che per ogni $(x_0, y_0) \in I \times]0, +\infty[$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione definita (e positiva) in un intorno di x_0.

Equazioni di Bernoulli

Il P.C.

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con il cambiamento di funzione incognita

$$y = z^{1/(1-\alpha)},$$

diventa

$$\begin{cases} z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x), \\ z(x_0) = y_0^{1-\alpha}, \end{cases}$$

ovvero un P.C. per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Equazioni di Bernoulli

Infatti, da $y = z^{1/(1-\alpha)}$, ovvero $z = y^{1-\alpha}$, derivando si ottiene

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

ma si sa che

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} = a(x)z^{1/(1-\alpha)} + b(x)z^{\alpha/(1-\alpha)}$$

e sostituendo

$$z' = (1-\alpha)\left(z^{1/(1-\alpha)}\right)^{-\alpha}\left(a(x)z^{1/(1-\alpha)} + b(x)z^{\alpha/(1-\alpha)}\right)$$

si ottiene

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$$

Equazioni di Bernoulli

La soluzione del problema di Cauchy è

$$z(x) = \mathrm{e}^{(1-\alpha)\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left\{y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds}\,dt\right\},$$

per ogni $x \in R$. Pertanto la soluzione del problema di partenza è

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left\{y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds}\,dt\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

ed ha per dominio l'insieme

$$I = \left\{x \in R : y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^{t} a(s)ds}\,dt > 0\right\}.$$

Equazioni di Bernoulli

Esempio

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + 2(\mathrm{e}^x + x)\sqrt{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

1. *l'equazione è di Bernoulli con* $\alpha = 1/2$. *La trasformazione è* $z = y^2$ *ed il problema di Cauchy diventa*
$$\begin{cases} z' = z + (\mathrm{e}^x + x), \\ z(0) = 1, \end{cases}$$
2. *inoltre il fattore integrante è*

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x dt = x,$$

Equazioni di Bernoulli

Esempio (...continua..)

1. *inoltre*
$$\begin{aligned}\int_0^x b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,dt &= \int_0^x (\mathrm{e}^t + t)\mathrm{e}^{-t}\,dt \\ &= [t-(t+1)e^{-t}]_0^x \\ &= 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+x.\end{aligned}$$
2. *Quindi otteniamo* $z(x) = e^{A(x)}\left\{z_0 + \int_0^x b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,dt\right\} = \mathrm{e}^x\left\{2-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+x\right\}$.
3. *Quindi otteniamo* $y(x) = (z(x))^2 = \mathrm{e}^{2x}\left\{2-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+x\right\}^2$.
4. *in questo caso l'insieme* I *è* R, *come si può verificare studiando la funzione* $f(x) = 2-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+x$.