Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Marino Belloni

20 aprile 2009

Osservazione

Pertanto il segno degli autovalori della matrice Hessiana nel punto stazionario permette di distinguere i comportamenti delle tre funzioni nel punto $(0,0)$.

Il teorema che segue ci permette di generalizzare l'esempio precedente.

Teorema (Fondamentale per studiare max/min liberi)

Sia $f : \Omega \to R$, $f \in C^2(\Omega)$ *con* $\Omega \subset R^2$ *aperto e sia* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *un punto stazionario per* f. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *se* $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, *allora* (x_0, y_0) *è punto di minimo relativo interno per* f;

(ii) *se* $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è punto di massimo relativo interno per* f;

(iii) *se* $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è punto di sella per* f.

Una (parziale) dimostrazione di questo risultato è presentata nel testo.

Osservazione (Importante)

Le condizioni (i) e (ii) nel teorema precedente forniscono condizioni sufficienti affinché un punto stazionario di una funzione di classe C^2 sia di massimo o di minimo. Tali condizioni sono solo sufficienti. Infatti, consideriamo ad esempio la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4$. La matrice Hessiana in $(0, 0)$ è la matrice

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono 0 e 2. Il punto $(0, 0)$ è punto di minimo assoluto di f in quanto $f \geq 0$ in R^2 ed f si annulla in $(0, 0)$.
Analogamente se consideriamo la funzione $g(x, y) = -x^2 - y^4$ abbiamo che la matrice Hessiana in $(0, 0)$ è la matrice

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha per autovalori 0 e 2. Il punto $(0, 0)$ è di massimo assoluto per g.

Nei due esempi precedenti

- gli autovalori di $H_f(0,0)$ sono entrambi non negativi,
- gli autovalori di $H_g(0,0)$ sono entrambi non positivi.

Questo non è un caso. Infatti si può provare il seguente teorema

Teorema (Condizione necessaria)

Sia $f : \Omega \to R$, $f \in C^2(\Omega)$ in Ω aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto stazionario di f.

- *Se (x_0, y_0) è di massimo relativo per f allora gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ sono entrambi non positivi.*
- *Se (x_0, y_0) è di minimo relativo per f allora gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ sono entrambi non negativi.*

Osservazione

La precedente è solo una condizione necessaria. Infatti la funzione $f(x,y) = -x^3 + y^2$ ha in $(0,0)$ un punto stazionario e la matrice Hessiana in tale punto ha 0 e 2 come autovalori. Ma $f(0,0) = 0$ mentre $f(x,0) > 0$ se $x > 0$ e $f(x,0) < 0$ se $x < 0$. Quindi $(0,0)$ non è un punto di massimo di f.

Esercizio

Considerate la funzione $f(x,y) = 2x^4 + y^2 + 4xy$. *Determinate gli eventuali punti stazionari di* f *in* R^2 *e studiatene la natura. Determinate estremo superiore e inferiore su* R^2, *specificando se sono massimo e/o minimo.*

Esercizio

Considerate la funzione $f(x,y) = 3x^2y^2 - 3x^2 - 2y^3 - 6y$. *Determinate gli eventuali punti stazionari di* f *in* R^2 *e studiatene la natura. Determinate estremo superiore e inferiore su* R^2, *specificando se sono massimo e/o minimo.*

Esempio

Sia $f : R^2 \to R$ *definita da* $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$. *Determiniamone gli estremi relativi, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di* f *in* R^2.

- $f \in C^2(R^2)$;
- $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6x, 3y^2 - 3)$;
- *se si risolve* $\nabla f(x,y) = (0,0)$ *per la determinazione dei punti stazionari*

$$\begin{cases} 6x(x-1) = 0 \\ 3(y-1)(y+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ (y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$

e questo equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-1) = 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} x = 0 \\ (y+1) = 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} x - 1 = 0 \\ (y-1) = 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} x - 1 = 0 \\ (y+1) = 0 \end{cases}$$

- *si trovano i punti* $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,1)$ $(-1,1)$.

Esempio (...continua...)

- *Calcoliamo l'Hessiana. Si ha che:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y,$$

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

  da cui si deduce che
  - $(0,1)$ *e* $(1,-1)$ *sono punti di sella,* $f(0,1) = -2$ *e* $f(1,-1) = 1$
  - $(0,-1)$ *è di massimo relativo,* $f(0,-1) = 2$
  - $(1,1)$ *è di minimo relativo,* $f(1,1) = -3$.
- *Poiché* $f(x,0) = 2x^3 - 3x^2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$.
- *Quindi* $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$ *e* $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$.

Massimi e minimi vincolati

(Descrizione del problema)

Sia E un chiuso limitato di R^2 e sia $f : E \to R$ una funzione continua.

1. *Il Teorema di Weierstrass garantisce che f ammette massimo e minimo assoluti in E, però non dice come calcolarli.*
2. *I sopra/sottolivelli sono un metodo grafico per calcolare tali valori. Risulta necessario saper rappresentare*
   - *gli insiemi di livello di f*
   - *l'insieme E*
3. *Ovvero, avendo l'espressione analitica di E nella forma $E = \{g(x, y) \leq 0\}$sappiamo risolvere*
$$\begin{cases} f(x,y) = k, \\ g(x,y) \leq 0, \end{cases}$$
   cercando il (più piccolo)/(più grande) valore di k per cui il precedente sistema ammette soluzione?

Osservazione

- *In generale non è semplice rappresentare l'insieme E e gli insiemi di livello di f.*
- *Quindi bisogna utilizzare un modo alternativo per determinare il massimo e il minimo assoluti di f in E.*

(Procedimento)

Supponiamo $f \in C^2(E \setminus \partial E)$.
$E \setminus \partial E$ *è un aperto di* R^2. *Per determinare massimo e minimi assoluti di* f *su* E *si può procedere così*

1. *se* $E \setminus \partial E \neq \emptyset$, *determinare i punti stazionari di* f *in* $E \setminus \partial E$ *e studiarne la natura;*
2. *determinare i massimi ed i minimi della funzione* f *sull'insieme* ∂E*; (*∂E *è chiuso e limitato, quindi l'esistenza di tali punti segue dal Teorema di Weierstrass)*
3. *confrontare i massimi e minimi assoluti di* f *su* ∂E *con i massimi e minimi relativi interni ottenuti al punto (i). Il valore più grande tra questi fornirà il massimo assoluto di* f *su* E*, il valore più piccolo, il minimo assoluto di* f *su* E.

(Procedimento)

Resta da vedere come studiare f su ∂E.
Supponiamo che esista $\varphi : [a, b] \to R^2$ una curva di classe C^1 tale che $\varphi([a, b]) = \partial E$. È immediato osservare che

- *un punto $(x_0, y_0) \in \partial E$ è di massimo (risp. minimo) relativo di f ristretto a ∂E se, e solo se,*
- *posto $(x_0, y_0) = \varphi(t_0)$, il punto t_0 è di massimo (risp. minimo relativo) della funzione di una variabile $g : [a, b] \to R$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$*

Lo studio di questa funzione può essere effettuato usando i metodi del calcolo differenziale per funzioni di una sola variabile.

Osservazione

Nel caso in cui $E = \{g(x, y) = k\}$ e non si sappia/riesca parametrizzare l'insieme, allora bisogna ricorrere al Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, che esula dal programma di questo corso.

Osservazione (Importante)

Spesso $\partial E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, *cioè unione di* n *sostegni* $S_1, \dots, S_n$ *di curve di classe* C^1. *In tal caso, possiamo incollare le curve* φ_j *che hanno per sostegno* S_j ($j = 1, \dots, n$), *ottenendo una curva* C^1 *a tratti con sostegno* ∂E.

Ma per lo studio di f *su* ∂E *è sufficiente*

- *considerare* $f_{|S_j}$ ($j = 1, \dots, n$),
- *studiare le funzioni* $f \circ \varphi_j$ *determinandone massimi e minimi assoluti*
- *confrontare tali valori al variare di* j: *il più grande di questi valori sarà il massimo di* f *su* ∂E, *il più piccolo, il minimo di* f *su* ∂E.

Esempio

Determinare max/min di $f : \overline{B(0,0;1)} \to R$ *definita da* $f(x,y) = \dfrac{1+|x|}{1+x^2+y^2}$.

Soluzione

f *è una funzione continua,* $\Omega = \overline{B(0,0;1)}$ *è chiuso e limitato, e quindi per il Teorema di Weierstrass esistono max/min assoluti di* f *su* Ω.

- f *non è differenziabile in tutto* $B(0,0;1)$ *(non lo è nei punti della forma* $(x,0)$ *con* $|x| < 1$, *a causa del* $|x|$ *che compare all'interno di* f*)*
- *essendo* $f(x,y) = f(-x,y)$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{B(0,0;1)}$, *possiamo studiare la funzione in*
$$E = \{(x,y) \in \overline{B(0,0;1)} : x \geq 0\}.$$
- *In* E *si ha* $f(x,y) = \dfrac{1+x}{1+x^2+y^2}$, *quindi* f *è di classe* C^2 *in* $E \setminus \partial E = \{(x,y) \in B(0,0;1) : x > 0\}$.
- *Si ottiene*
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1-2x-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, -\frac{2y(1+x)}{(1+x^2+y^2)^2}\right),$$
per ogni $(x,y) \in E \setminus \partial E$.

Esempio (...continua...)

- $(-1+\sqrt{2},0)$ *è l'unico punto stazionario di* f *in* $E \setminus \partial E$.
- **Attenzione:** *risolvendo* $\nabla f(x,y) = (0,0)$ *si ottiene anche* $(-1-\sqrt{2},0) \notin E \setminus \partial E$, *e quindi va trascurato!*
- $H_f(-1+\sqrt{2},0)$ *ha come autovalori* $\lambda_1 = \lambda_2 = -3\sqrt{2}/4 - 1 < 0$. *Quindi*
  - $(-1+\sqrt{2},0)$ *è un massimo locale interno di* f
  - $f(-1+\sqrt{2},0) = (\sqrt{2}+1)/2$.
- *Studiamo* f *su* ∂E. $\partial E = S_1 \cup S_2$, *ove*
  - $S_1 := \{(0,y) : |y| \leq 1\}$ *(segmento)*
  - $S_2 := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ x \geq 0\}$ *(semicirconferenza)*.
- *La funzione* $\varphi : [-1,1] \to R^2$ *definita da* $\varphi(t) = (0,t)$ *è una curva di classe* C^1 *e* $\varphi([-1,1]) = S_1$.
- *Poniamo* $g_1 = f \circ \varphi$: *si ha che* $g_1(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *per ogni* $t \in [-1,1]$.
- g_1 *ha massimo in* $t=0$ *e minimo in* $t = \pm 1$. *Di conseguenza* $f_{|S_1}$ *ha massimo nel punto* $(0,0)$ *e minimo nei punti* $(0,-1)$ *e* $(0,1)$. *Il massimo di* $f_{|S_1}$ *è* 1 *mentre il minimo è* $1/2$.

Esempio (...continua...)

- *Consideriamo ora* $S_2 = \psi([-\pi/2, \pi/2])$, *dove* $\psi(t) = (\cos(t), \sin(t))$.*La curva* ψ *è di classe* C^1.
- *posto* $g_2 = f \circ \psi$*si ha che* $g_2(t) = \dfrac{1+\cos(t)}{2}$ *per ogni* $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- g_2 *ha massimo in* $t = 0$ *e minimo in* $t = \pm\frac{\pi}{2}$. *Di conseguenza* $f_{|S_2}$ *ha massimo nel punto* $(1, 0)$ *e minimo nei punti* $(0, -1)$ *e* $(0, 1)$. *Il massimo di* $f_{|S_2}$ *è* 1 *mentre il minimo è* $1/2$.
- *Poiché* $(\sqrt{2} + 1)/2 > 1$, *si deduce che*

$$\max_{(x,y)\in E} f(x, y) = \max\{f(-1 + \sqrt{2}, 0), 1, 1\} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

$$\min_{(x,y)\in E} f(x, y) = \max\{f(0, -1), f(0, 1)\} = \frac{1}{2}.$$

I punti di minimo che abbiamo trovato sono simmetrici rispetto all'asse delle y. *Questo percjè* $f(x, -y) = f(x, y)$ *per ogni* $(x, y) \in E$. *Pertanto lo studio di* f *poteva essere ristretto all'insieme* $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$*ma in questo modo avremmo avuto tre insiemi da parametrizzare.*

Osservazione

Il motivo per cui massimi e minimi su insiemi non aperti sono detti vincolati, sta nel fatto che

- *un punto (x_0, y_0) di massimo/minimo relativo interno è di massimo/minimo per la restrizione di f ad ogni retta che passa per il punto (x_0, y_0),*
- *un punto (x_0, y_0) di massimo/minimo per E non interno ad E, allora non tutte le direzioni di avvicinamento a (x_0, y_0) sono ammesse. Il punto resta di max/min per f ristretta a curve che stanno sulla frontiera (il vincolo!)*

Equazioni differenziali-generalità

Un'equazione differenziale di ordine n è una "relazione funzionale" che lega la funzione incognita y alle sue derivate fino all'ordine n, ovvero

$$f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0,$$

Definizione

Siano $I \subseteq R$ e $f : \Omega \subseteq R^{n+1} \to R$ dati. Una funzione $y : I \to R$, si dice `soluzione` *dell'equazione differenziale se*

1. *per ogni $x \in I$ $(x, y(x)) \in \Omega$;*
2. *$y \in C^n(I; R)$;*
3. *$f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0$, per ogni $x \in I$.*

Equazioni differenziali-generalità

Definizione (Problema di Cauchy)

Sia $f : \Omega \subseteq R^{n+1} \to R$. *Per ogni* $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$*, il problema*

$$\begin{cases} f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \quad \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

si dice `problema di Cauchy` *associato all'ODE* $f(x,\, y(x),\, y'(x), \ldots, y^n(x)) = 0$.

Equazioni differenziali-generalità

Esempio (Decadimento radioattivo e datazione C^{14})

Il neutrone non è stabile: si disintegra in un protone, un elettrone e un neutrino.

- $N(t)$: *numero dei neutroni al tempo* t,
- k : *la probabilità che un neutrone si disintegri in un secondo, allora*
$$N'(t) = -kN(t),$$
- *Le soluzioni sono date da*
$$N(t) = c\mathrm{e}^{-kt}, \quad \textit{al variare di } c \in R.$$
- *La soluzione dipende da* c*: per conoscere* $N(T)$ *si deve conoscere* $N(t_0)$ *per qualche valore* $t_0 \neq T$.
- $c = N(0)$, *ovvero* $c =$*numero di neutroni al tempo* $t = 0$.

Equazioni differenziali-generalità

Esempio (...continua...)

Il carbonio C^{14} *è un isotopo radioattivo del carbonio che si disintegra (decade) così*

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-kt}, \quad \textit{per ogni } t > 0.$$

Vogliamo scoprire da quanto tempo è stato tagliato un certo albero.

- *Un albero contiene una percentuale* $P(0)$ *– il dato iniziale – nota di* C^{14} *pari a quella dell'aria, quindi costante.*
- *L'albero tagliato non assorbe più nuovi atomi, e il* C^{14} *interno decade secondo la legge esponenziale.*
- *Si ottiene*

  $$P(t) = P(0)\mathrm{e}^{-kt}, \quad \textit{per ogni } t > 0.$$

  dove $P(t)$ *è la percentuale di* C^{14} *sul totale degli atomi di carbonio*
- k *la costante di decadimento dato sperimentale*
- *misuro* $P(T)$ *il livello attuale e calcolo* T*, il tempo intercorso per passare da* $P(0)$ *al livello attuale*

  $$T = \frac{1}{k}\log\left(\frac{P(0)}{P(T)}\right).$$