

Analisi Matematica C - a.a. 2008/09

Docente:
Marino Belloni

30 marzo 2009

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

I seguenti due teoremi sono l'estensione al caso di funzioni di due variabili di ben noti risultati per funzioni di variabile reale.

Teorema (Teorema di esistenza degli zeri)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) < 0 < f(x_1, y_1)$, allora esiste $(x, y) \in \Omega$ tale che $f(x, y) = 0$.

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'insieme chiuso e limitato $C \subset \mathbb{R}^2$. Allora f ammette minimo m e massimo M assoluti in C , cioè esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in C$ tali che

$$m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1) = M, \quad \text{per ogni } (x, y) \in C.$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

(i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

(iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

(i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

(iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

(i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.

(iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

(iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

- (i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

- (iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Corollario (del teorema di Weierstrass)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che esiste $\ell = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

- (i) Se $\ell = +\infty$, allora esiste $m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (ii) Se $\ell = -\infty$, allora esiste $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y)$.
- (iii) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) > 0$, allora esiste

$$M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

- (iv) Se $\ell = 0$ ed esiste $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\hat{x}, \hat{y}) < 0$, allora esiste

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

Dimostrazione di (i).

- Poiché $\ell = +\infty$, esiste $r > 0$ tale che $f(x, y) \geq f(0, 0) + 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2 + y^2 > r^2$.
- Ne segue che

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \inf_{(x,y) \in \overline{B(0,0;r)}} f(x, y)$$

- Ora $\overline{B(0,0;r)}$ è un insieme chiuso e limitato.
- Quindi per il Teorema di Weierstrass la restrizione di f a $\overline{B(0,0;r)}$ ammette minimo assoluto su $\overline{B(0,0;r)}$ e tale minimo risulta minimo assoluto anche per f .

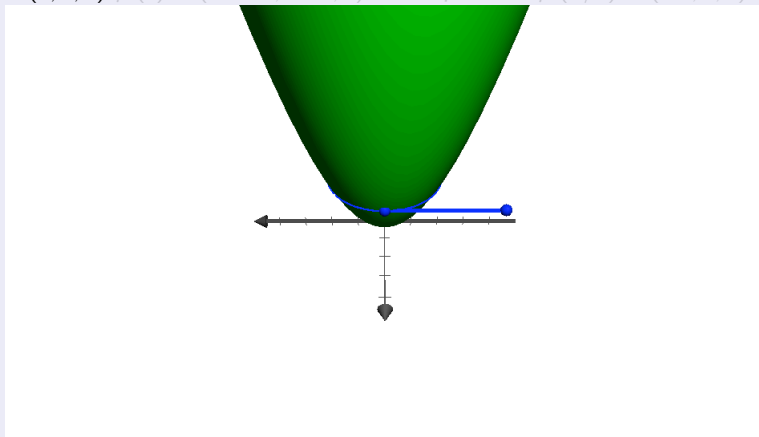
Per dimostrare la (ii) basta applicare la precedente dimostrazione alla funzione $-f$

Le dimostrazioni delle proprietà (iii) e (iv) sono del tutto analoghe e quindi sono lasciate al lettore. □

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$

(Tangente alla circonferenza)

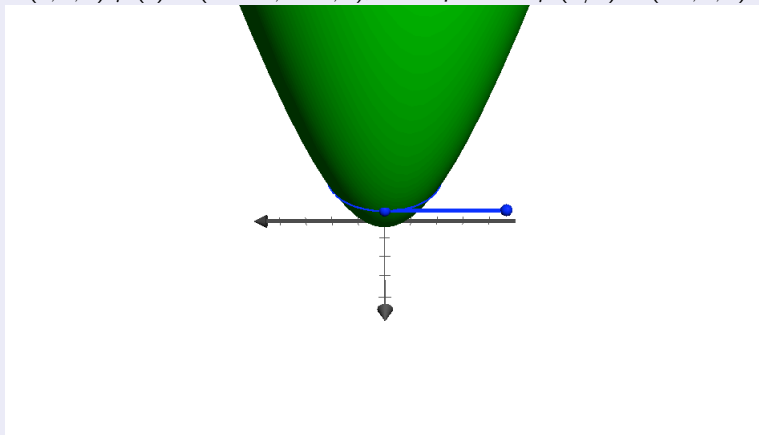
Il vettore tangente alla circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ nel punto $\varphi(\pi/2) = (0, 1, 1)$: $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, e dunque $v_1 = \varphi'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$.



Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$

(Tangente alla circonferenza)

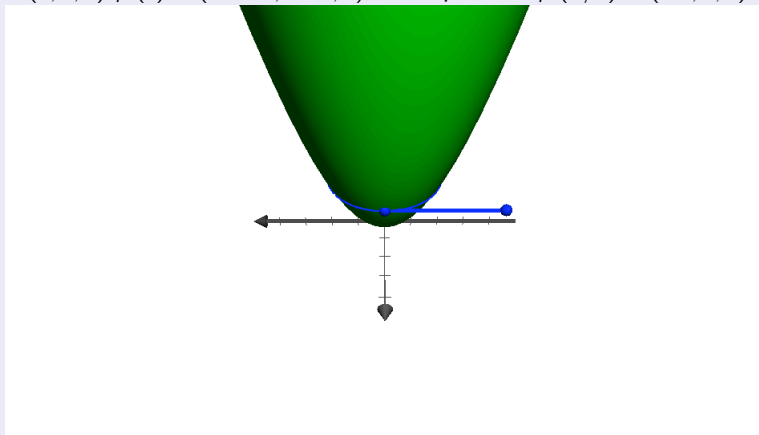
Il vettore tangente alla circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ nel punto $\varphi(\pi/2) = (0, 1, 1)$: $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, e dunque $v_1 = \varphi'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$.



Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$

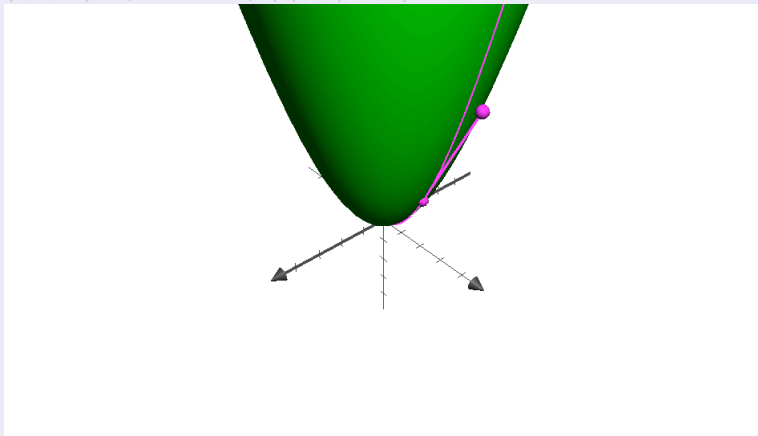
(Tangente alla circonferenza)

Il vettore tangente alla circonferenza $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ nel punto $\varphi(\pi/2) = (0, 1, 1)$: $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, e dunque $v_1 = \varphi'(\pi/2) = (-1, 0, 0)$.



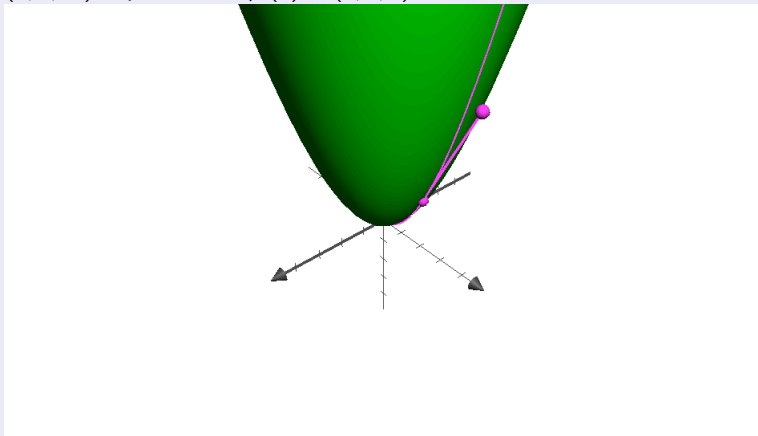
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (0, t, t^2)$ nel punto $\varphi(1) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (0, 1, 2t)$ e quindi $v_2 = \varphi'(1) = (0, 1, 2)$.



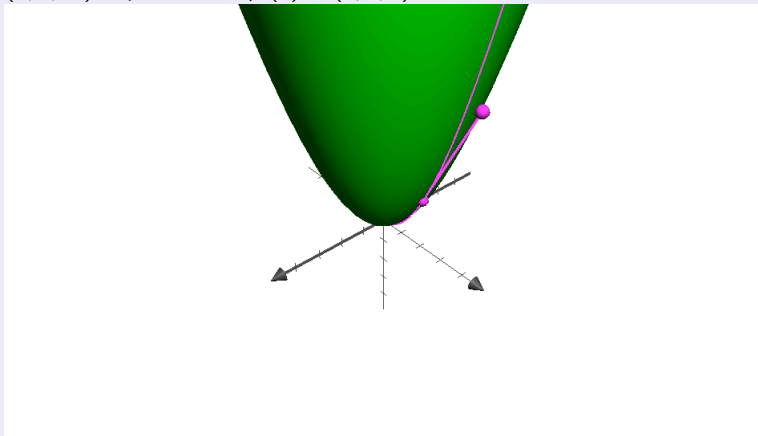
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (0, t, t^2)$ nel punto $\varphi(1) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (0, 1, 2t)$ e quindi $v_2 = \varphi'(1) = (0, 1, 2)$.



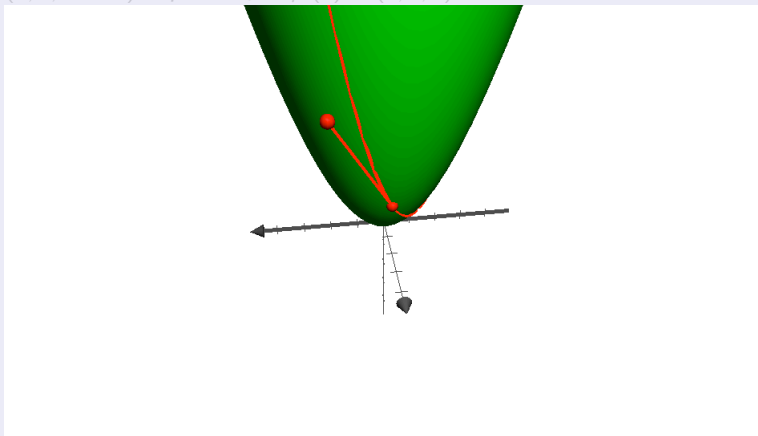
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (0, t, t^2)$ nel punto $\varphi(1) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (0, 1, 2t)$ e quindi $v_2 = \varphi'(1) = (0, 1, 2)$.



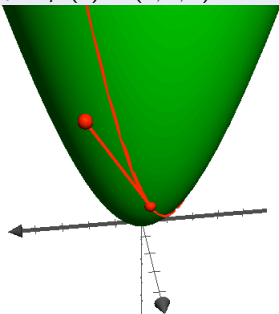
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (t, 1+t, 1+2t+2t^2)$ nel punto $\varphi(0) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (1, 1, 2+4t)$ e quindi $v_3 = \varphi'(0) = (1, 1, 2)$.



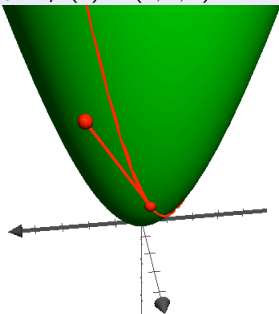
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (t, 1+t, 1+2t+2t^2)$ nel punto $\varphi(0) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (1, 1, 2+4t)$ e quindi $v_3 = \varphi'(0) = (1, 1, 2)$.



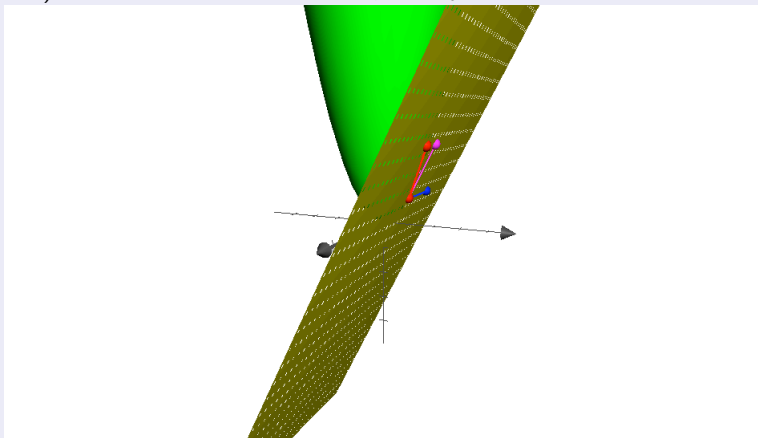
(Tangente alla Parabola)

Il vettore tangente alla parabola $\varphi(t) = (t, 1+t, 1+2t+2t^2)$ nel punto $\varphi(0) = (0, 1, 1)$:
 $\varphi'(t) = (1, 1, 2+4t)$ e quindi $v_3 = \varphi'(0) = (1, 1, 2)$.



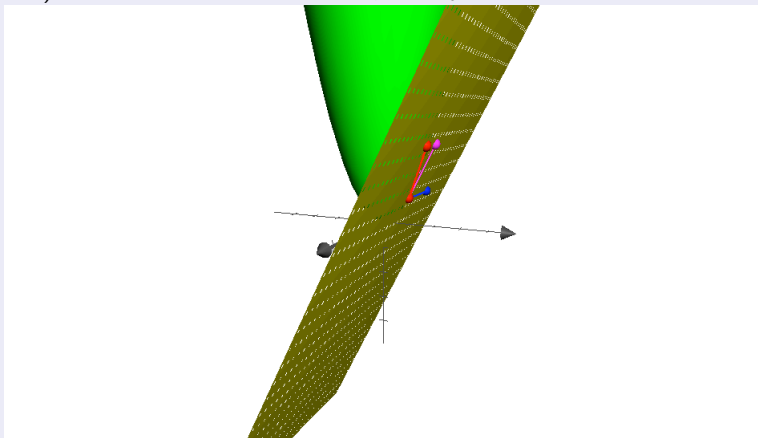
(Piano Tangente al paraboloide)

Il piano tangente al paraboloide nel punto di coordinate $(0, 1, 1)$ avente equazione $z = 2(y - 1) + 1$. Si osservi che contiene v_1 , v_2 e v_3 .



(Piano Tangente al paraboloide)

Il piano tangente al paraboloide nel punto di coordinate $(0, 1, 1)$ avente equazione $z = 2(y - 1) + 1$. Si osservi che contiene v_1 , v_2 e v_3 .



Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che *tutte queste rette giacciono in un piano*.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che *tutte queste rette giacciono in un piano*.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

Dato il paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il punto sul suo grafico $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, 1)$, esistono infinite curve regolari

$$\varphi : I \rightarrow \text{Graf}(f) = \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

passanti per il punto $(0, 1, 1)$, e ognuna di queste ha una retta tangente passante per il punto $(1, 1, 2)$.

Si prova che **tutte queste rette giacciono in un piano**.

Osservazione

I vettori v_1 e v_2 individuati in precedenza sono linearmente indipendenti e individuano il piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} (x) & (y-1) & (z-1) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(y-1) - z + 1 = 0,$$

ovvero $z = 2y - 1$.

Questo sarà il piano tangente al grafico del paraboloide nel punto $(0, 1, 1)$, ovvero quel piano che contiene tutti i vettori tangenti a curve (regolari) il cui sostegno appartiene al grafico di f .

Osservazione

- **Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.**
- *per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!*

Osservazione

- Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.
- per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!

Osservazione

- Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.
- per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!

Osservazione

- Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.
- per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!

Osservazione

- Questo piano tangente rappresenta, per le superficie, l'analogo di ciò che la retta tangente è per le curve.
- per le funzioni di una variabile non sempre esiste la retta tangente ad un punto del grafico, così come non sempre esiste il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Infatti, si provi a ripetere il procedimento visto in precedenza esaminando però il punto $(0,0,0)$ appartenente alla superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: si troveranno tre vettori linearmente indipendenti e un piano non basta a contenerli tutti e tre!

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

In tutta questa lezione con Ω denoteremo un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e ν un versore. Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ in (x_0, y_0) se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ si dice derivata direzionale di f rispetto a ν in (x_0, y_0) .

Osservazione

La derivata direzionale di f nel punto (x_0, y_0) secondo $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è la derivata della funzione di una variabile

$$t \mapsto f(x_0 + t\nu_1, y_0 + t\nu_2)$$

nel punto $t = 0$.

Questa funzione è ben definita in un intorno di $t = 0$: infatti, (x_0, y_0) è un punto interno di Ω e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, y_0; r) \subset \Omega$; la funzione f sarà quindi definita almeno in $(-r, r)$.

Teorema

Se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hanno derivata direzionale secondo ν in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora

- la funzione $f + g$ ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- la funzione fg ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- se $g(x_0, y_0) \neq 0$, la funzione f/g ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0)}{(g(x_0, y_0))^2}.$$

Teorema

Se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hanno derivata direzionale secondo ν in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora

- la funzione $f + g$ ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- la funzione fg ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- se $g(x_0, y_0) \neq 0$, la funzione f/g ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0)}{(g(x_0, y_0))^2}.$$

Teorema

Se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hanno derivata direzionale secondo ν in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora

- la funzione $f + g$ ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- la funzione fg ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- se $g(x_0, y_0) \neq 0$, la funzione f/g ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0)}{(g(x_0, y_0))^2}.$$

Teorema

Se $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, hanno derivata direzionale secondo ν in $(x_0, y_0) \in \Omega$, allora

- la funzione $f + g$ ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- la funzione fg ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\nu}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0);$$

- se $g(x_0, y_0) \neq 0$, la funzione f/g ha derivata direzionale in (x_0, y_0) secondo ν e

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left(\frac{f}{g} \right) (x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial\nu}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial\nu}(x_0, y_0)}{(g(x_0, y_0))^2}.$$

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Esempio

Sia $f(x, y) = \log(x + y^2 + 1)$ e $\nu = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dove $\theta \in [0, 2\pi[$. Mostriamo che esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \cos(\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

Infatti

$$\frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t}.$$

È noto che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$. Pertanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \sim \begin{cases} \cos(\theta), & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ t(\sin(\theta))^2, & \text{se } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

Quindi, facendo tendere t a zero, si mostra l'esistenza della derivata direzionale di f nella direzione ν nel punto P in quanto

$$\frac{\log(t \cos(\theta) + t^2(\sin(\theta))^2 + 1)}{t} \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0), \quad t \rightarrow 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

Definizione

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si dice che:

- f è derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (1, 0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a x in (x_0, y_0) ;

- f è derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) , se esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0)$ quando $\nu = (0, 1)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(x_0, y_0)$$

è detto derivata parziale di f fatta rispetto a y in (x_0, y_0) .

Se esistono entrambe le derivate parziali nel punto (x_0, y_0) , il vettore

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

si dice (vettore) gradiente di f nel punto (x_0, y_0) .

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Diamo ora la definizione di funzione differenziabile in un punto per funzioni di due variabili.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Preso $(x_0, y_0) \in \Omega$, si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste un vettore (a, b) tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

ovvero se, quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

L'applicazione lineare $(h, k) \mapsto (a, b) \cdot (h, k)$ è detta differenziale della funzione f nel punto (x_0, y_0) , e si pone $df(x_0, y_0) := (a, b)$.

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (IMPORTANTE)

- (i) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è continua nel punto.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora f ammette derivate parziali nel punto. Inoltre $df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.
- (iii) Se f differenziabile in (x_0, y_0) , allora f è derivabile in questo punto secondo qualsiasi direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nu \rangle.$$

- (iv) Dire che una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$ equivale a dire che esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avente equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- (v) Se f è una funzione differenziabile in (x_0, y_0) con $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora la direzione $\mathbf{v} = \nabla f(x_0, y_0) / |\nabla f(x_0, y_0)|$ individuata dal gradiente risulta essere quella di massima pendenza nel senso che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) : \nu = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

Osservazione (Come provare che f non è differenziabile)

- (i) Se proviamo che **non esiste** una derivata parziale o una derivata direzionale di f in (x_0, y_0) , allora f non sarà differenziabile. Ad esempio la funzione $f(x, y) = |x|$ non ammette derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0, 0)$. Quindi in tale punto non sarà differenziabile.
- (ii) Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora la funzione

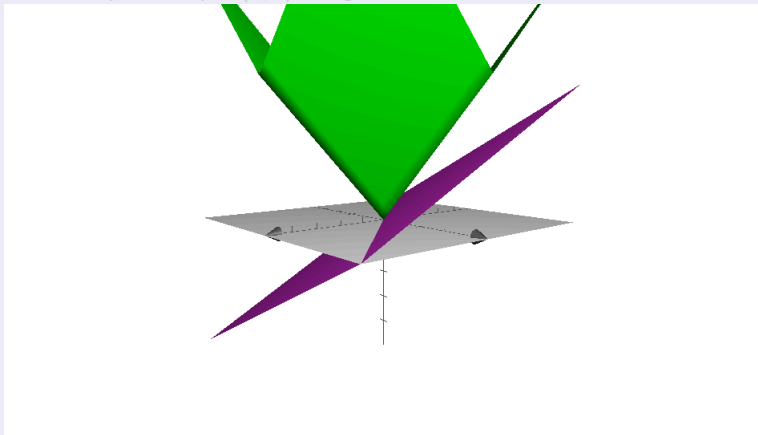
$$\nu \mapsto \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \langle \nabla u(x_0, y_0), \nu \rangle$$

deve risultare lineare in ν_1 e ν_2 .

Quando questa funzione è non lineare, se ne conclude che f non è differenziabile.

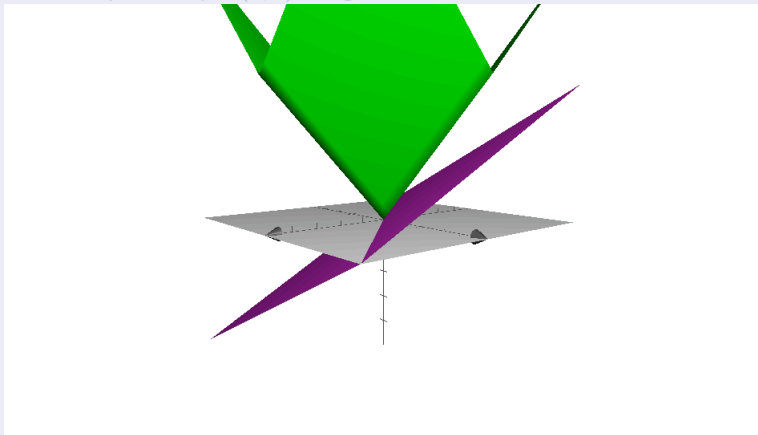
Esempio

Esistono funzioni continue ma non differenziabili: $f(x,y) = |x| + |y|$ non è differenziabile nei punti degli assi coordinati. Per convincersi, basta osservare che ivi non esiste il piano tangente. Si veda per esempio $(0,0)$ in figura.



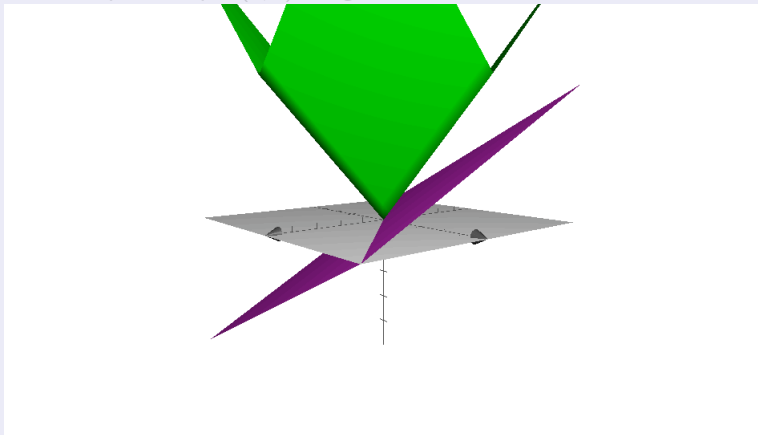
Esempio

Esistono funzioni continue ma non differenziabili: $f(x,y) = |x| + |y|$ non è differenziabile nei punti degli assi coordinati. Per convincersi, basta osservare che ivi non esiste il piano tangente. Si veda per esempio $(0,0)$ in figura.



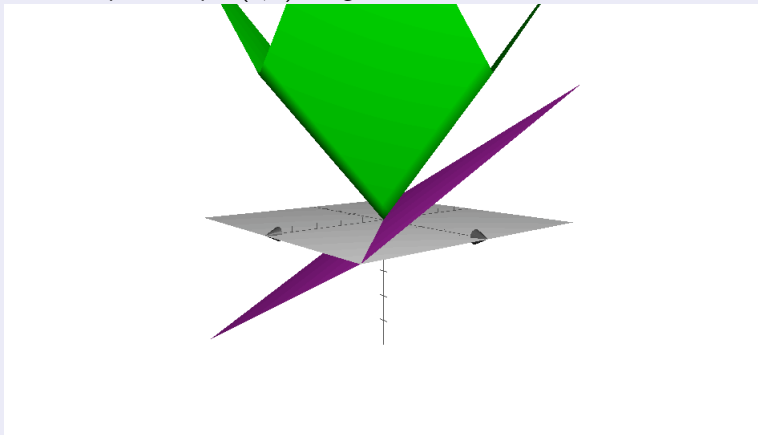
Esempio

Esistono funzioni continue ma non differenziabili: $f(x, y) = |x| + |y|$ non è differenziabile nei punti degli assi coordinati. Per convincersi, basta osservare che ivi non esiste il piano tangente. Si veda per esempio $(0, 0)$ in figura.



Esempio

Esistono funzioni continue ma non differenziabili: $f(x, y) = |x| + |y|$ non è differenziabile nei punti degli assi coordinati. Per convincersi, basta osservare che ivi non esiste il piano tangente. Si veda per esempio $(0, 0)$ in figura.



Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non differenziabili. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è differenziabile in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non continue. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è continua in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non continue. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è continua in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non continue. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è continua in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Esempio

Esistono funzioni derivabili parzialmente secondo una qualsiasi direzione in un punto ma ivi non continue. Ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- *non è continua in $(0, 0)$*
- *esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ qualsiasi sia la direzione ν .*

Si veda il testo per i dettagli.

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
- si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- si verifica che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- *si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$*
- *si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*
- *si verifica che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- *si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$*
- *si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*
- *si verifica che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- *si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$*
- *si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*
- *si verifica che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
- si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- si verifica che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili. Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- *si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$*
- *si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*
- *si verifica che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili.
Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Osservazione

Per provare che una funzione è differenziabile in un punto si fanno tre passi

- si calcola $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$
- si calcola $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- si verifica che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Il prossimo teorema identifica un'ampia classe di funzioni differenziabili. Risulta molto importante perchè molto semplice da utilizzare.

Teorema (Teorema del differenziale totale)

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data e (x_0, y_0) un punto di Ω . Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di (x_0, y_0) e che siano continue in (x_0, y_0) . Allora f è differenziabile in (x_0, y_0) .

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Esempio

- (i) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x, y) = x^4 y^2 - 3x^2 y + 2y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4 y - 3x^2 + 4y,$$

Essendo le derivate parziali di f funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, grazie al teorema del differenziale totale possiamo concludere che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Più in generale ogni polinomio è una funzione continua - e differenziabile - su $\mathbb{R}^2$.

- (ii) Alcuni esempi:

- ▶ la funzione $f(x, y) = \tan(x) \cos(y^2 - 1)$ è differenziabile in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$
- ▶ $g(x, y) = e^x$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
- ▶ $h(x, y) = \log(y)$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

"il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ".

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

"la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ".

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Osservazione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $(x_0, y_0) \in \Omega$. Il piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z - f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

Dunque

“il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in P , che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$ ”.

L'equazione del piano tangente si scrive anche

$$\langle (\nabla f(x_0, y_0), -1), (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \rangle = 0,$$

e si legge:

“la normale al piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da $(\nabla f(x_0, y_0), -1)$ ”.

L'equazione della retta tangente nel punto $P = (x_0, y_0)$ ad ogni curva semplice, regolare in (x_0, y_0) , con sostegno l'insieme di livello $\{f = f(x_0, y_0)\}$, è data da

$$0 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 2)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 1)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Esempio

Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$. Scrivere

- l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, 4)$
- la retta tangente al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$ che parametrizzi l'insieme di livello $\{f(x, y) = 4\}$.

Soluzione

- f è un polinomio di terzo grado, e quindi è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.
- $\nabla f(1, 2) = (1, 8)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 4)$ è

$$z = 4 + \langle (1, 8), (x - 1, y - 2) \rangle$$

cioè $z = x + 8y - 13$.

- il vettore tangente nel punto $(1, 2)$ al grafico di ogni curva semplice, regolare in $(1, 2)$, che parametrizza l'insieme di livello $\{f = f(1, 1)\}$, è ortogonale a $\nabla f(1, 2)$.
- Ne segue che la direzione di tale vettore tangente si ottiene cercando un vettore (a, b) tale che $(a, b) \cdot (1, 8) = 0$. Ad esempio $(a, b) = (-8, 1)$.

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .

Definizione

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione data. f si dice di classe C^1 (in Ω) se f ammette derivate parziali continue in tutto Ω . Lo spazio delle funzioni di classe C^1 in Ω si denota con $C^1(\Omega)$.

Corollario (del teorema del differenziale totale)

Se $f \in C^1(\Omega)$, allora f è differenziabile in Ω .