Analisi Matematica 1 Matematici e Fisici

Prova scritta parziale del 18-02-2016

a.a. 2015-16 Correzione

Esercizio 1. Determinare tutte le primitive della funzione

$$\frac{e^{2x}+3e^{x}}{e^{4x}-16},$$

indicandone l'insieme di definizione.

Dobbiamo calcolare $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+3e^{x}}{e^{4x}-16}\,dx \underset{\substack{y=e^x \\ dx=\frac{dy}{y}}}{=} \left(\int \frac{y^2+3y}{y^4-16}\,\frac{dy}{y}\right)_{y=e^x}$

(*) vedi sotto

$$=\left(\int \frac{y+3}{y^4-16}\,dy\right)_{y=e^x} = \frac{5}{32}\ln|e^x-2| - \frac{1}{32}\ln|e^x+2| - \frac{1}{16}\ln|e^{2x}+4| - \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+c$$

$c\in\mathbb{R}$

e le primitive sono definite su $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$, e dunque son definite su $]-\infty,\ln 2[$ o su $]\ln 2,+\infty[$ (debbono essere definite su un intervallo)

(*) $$\frac{y+3}{y^4-16} = \frac{y+3}{(y-2)(y+2)(y^2+4)} = \frac{A}{y-2}+\frac{B}{y+2}+\frac{Cy+D}{y^2+4}$$

$$= \frac{A(y+2)(y^2+4)+B(y-2)(y^2+4)+(Cy+D)(y^2-4)}{y^4-16}$$

$$\iff y+3 = A(y+2)(y^2+4)+B(y-2)(y^2+4)+(Cy+D)(y^2-4)$$

pongo $y=2$ $\quad 5 = A\cdot 32 \Rightarrow A = 5/32$

" $\quad y=-2$ $\quad 1 = -B\,32 \Rightarrow B=-1/32$

$y=0$ $\quad 3 = \frac{5}{\cancel{32}_4}\cdot\cancel{8}^1 + \frac{1}{\cancel{32}_4}\cancel{8}^1 - 4D \Rightarrow 4D = \frac{3}{2}-3 \Rightarrow D=-3/8$

$y=1$ $\quad 4 = 15\cdot\frac{5}{32} + 5\cdot\frac{1}{32} - 3C - 3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) \Rightarrow 4 = \frac{5}{2}+\frac{9}{8}-3C$

$\Rightarrow 3C = \frac{29}{8}-\frac{32}{8} \Rightarrow C=-1/8$

e dunque

$$\frac{y+3}{y^4-16} = \frac{5}{32}\cdot\frac{1}{y-2} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{y+2} - \frac{1}{8}\,\frac{y}{y^2+4} - \frac{3}{8}\,\frac{1}{y^2+4}$$

$$= \frac{5}{32}\,\frac{1}{y-2} - \frac{1}{32}\,\frac{1}{y+2} - \frac{1}{16}\,\frac{2y}{y^2+4} - \frac{3}{16}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{y+3}{y^4-16}\,dy = \frac{5}{32}\ln|y-2| - \frac{1}{32}\ln|y+2| - \frac{1}{16}\ln|y^2+4| - \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+c$$

$c\in\mathbb{R}$

Esercizio 2. Sia data la funzione $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2ke^x + 2\right)$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

i) Determinare per quali valori di k la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$;

ii) determinare per quali valori di k la funzione ha minimo assoluto e quindi calcolarlo;

iii) tracciare il grafico di f quando $k = 1$. Sono richiesti: dominio, limiti agli estremi, eventuali asintoti, intervalli di monotonia.

i) • quando $k \leq 0$ allora $e^{2x} - 2ke^x + 2 \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$
allora $\mathrm{dom}(f) \equiv \mathbb{R}$

• quando $k > 0$ allora $(e^{2x} - 2ke^x + k^2) + 2 - k^2 =$
$= (e^x - k)^2 + 2 - k^2 > 0 \ \& \ k > 0$
se $2 - k^2 > 0 \ \& \ k > 0$ se $k^2 < 2 \ \& \ k > 0$
se $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \ \& \ k > 0$
se $0 < k < \sqrt{2}$ allora $\mathrm{dom}(f) \equiv \mathbb{R}$

Dunque $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ se $k < \sqrt{2}$

NOTA: quando $k \geq \sqrt{2}$ il dominio di f è strettamente contenuto in $\mathbb{R}$ e si ha
$e^{2x} - 2ke^x + 2 = 0$ se $e^x = k \pm \sqrt{k^2 - 2}$
se $x_1 = \ln\left(k - \sqrt{k^2 - 2}\right)$
$x_2 = \ln\left(k + \sqrt{k^2 - 2}\right)$

e si ha $\lim_{x \to x_2^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$

ii) Abbiamo visto che, quando $\mathrm{dom}(f) \subsetneq \mathbb{R}$,
$\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$

Ne segue che $\nexists \min f(\mathbb{R})$ quando $k \geq \sqrt{2}$

Quando $k < \sqrt{2}$ $\mathrm{dom}(f) \equiv \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2ke^x + 2} \cdot (2e^{2x} - 2ke^x) = 0 \iff 2e^x(e^x - k) = 0$$

• se $k \leq 0$ allora $f' > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
allora $\inf f(\mathbb{R}) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(2)$
e $\nexists \min f(\mathbb{R})$

• se $0 < k < \sqrt{2}$ allora $f' = 0$ se $x = \ln k$

allora $f' \begin{cases} < 0 & x < \ln k \\ > 0 & x > \ln k \end{cases}$

allora $f(\ln k) = \ln(2-k^2) = \min f(\mathbb{R})$

iii) $f = \ln(e^{2x} - 2e^x + 2)$

Dominio: $e^{2x} - 2e^x + 2 = (e^{2x} - 2e^x + 1) + 1 = (e^x - 1)^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e dunque $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$

(Nota: era chiaro anche dal punto ii))

Limiti agli estremi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(e^{-\infty} - 2e^{-\infty} + 2) = \ln(2)$$ Asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left[e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x + \lim_{x \to +\infty} (1 - 2e^{-x} + 2e^{-2x})$$

$$= +\infty$$

Ricerca asintoto obliquo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln(1 - 2e^{-x} + 2e^{-2x}) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - 2e^{-x} + 2e^{-x \cdot 2}) = \ln(1 - 2e^{-\infty} + 2e^{-\infty})$$
$$= \ln(1) = 0$$

dunque $y = 2x$ asintoto obliquo

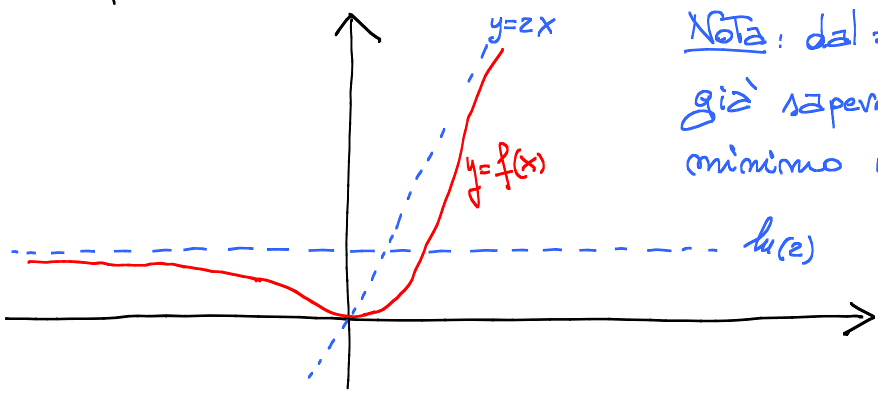
Intervalli di monotonia e minimo

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 2} \cdot (2e^{2x} - 2e^x) = 0 \quad \underline{\text{sse}} \quad 2e^x(e^x - 1) = 0$$

sse $x = \ln(1) = 0$ e $f'(x) \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$

e dunque $0 = f(0) = \ln(1) = \min f(\mathbb{R})$

In particolare $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$



Nota: dal punto ii) già sapevo che $\exists$ minimo in $\ln(1) = 0$

Esercizio 3. Studiare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

$$a_n = 3^n \sin(3^{-n}(-1)^n); \qquad b_n = \left(\sqrt[n]{n} + \sin(1)\right)^n.$$

Calcolare il limite se esiste, oppure giustificarne la non esistenza.

i) $a_n = 3^n \cdot \sin\left((-1)^n \cdot 3^{-n}\right) = (-1)^n \cdot \dfrac{\sin(3^{-n})}{3^{-n}}$

Ricordiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow$

$\forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} \cdot \frac{\sin(3^{-2n})}{3^{-2n}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{\sin(3^{-2n-1})}{3^{-2n-1}} = -1$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

ii) $b_n = \left(\sqrt[n]{n} + \sin 1\right)^n$ $\qquad \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(1) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt[n]{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b_n \geq (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Disuguaglianza di Bernoulli

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n \geq \lim_{n\to+\infty} (1+n\varepsilon) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

Esercizio 4. Considerata la successione definita per ricorrenza,

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

si provi che (x_n) è monotòna e limitata. Se ne calcoli quindi il limite.

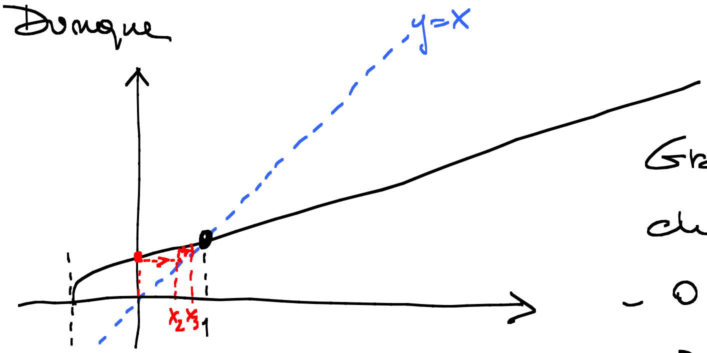
posto $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$, f è continua $\forall x \geq -1$

$f(-1) = 0$; $f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $f(1) = 1$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0 \quad \forall x > -1$

$f'(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Dunque



Graficamente sembra che (x_n) sia

- $0 \leq x_n \ \forall n$
- crescente
- $x_n \leq 1 \ \forall n$
- $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$

<u>Proviamo $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$</u>

$n = 1 \qquad x_1 = 0 \quad$ vera

Valga per n : $x_n \geq 0$

Provando per $x_{n+1} \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n+1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad$ vera

Proviamo che (x_n) crescente

$n = 1 \qquad x_1 = 0 < \sqrt{\frac{1}{2}} = x_2 \qquad$ vera

Sia vera per $n \qquad x_n < \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} = x_{n+1}$

provando per $n+1$

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} < \sqrt{\frac{1+x_{n+1}}{2}} = x_{n+2}$$

$$\iff \quad \frac{1+x_n}{2} < \frac{1+x_{n+1}}{2}$$

$$\iff \quad x_n < x_{n+1}$$ vera (segue dall'ipotesi induttiva)

Proviamo che $x_n \leq 1 \ \forall n$

$n=1$ $\quad x_1 = 0 < 1$ vera

valga per n $\quad x_n \leq 1$

proviamolo per $n+1$ $\quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$ Applico ipotesi induttiva

A questo punto (x_n) è crescente e superiormente limitata da 1 e inferiormente limitata da 0

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = l \in [0,1]$ ed essendo f continua in $[0,1]$ ed essendo $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l$ (è una sottosuccessione)

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l = f(l) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$

$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \Rightarrow l^2 = \frac{1+l}{2} \Rightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$

$\Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$ $\begin{cases} 1 \\ \cancel{-\frac{1}{2}} \text{ non accettabile poiché } l \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow l = 1$