

Permutazioni P_n

Disposizioni (senza ripetizione) $D_{n,k}$

"

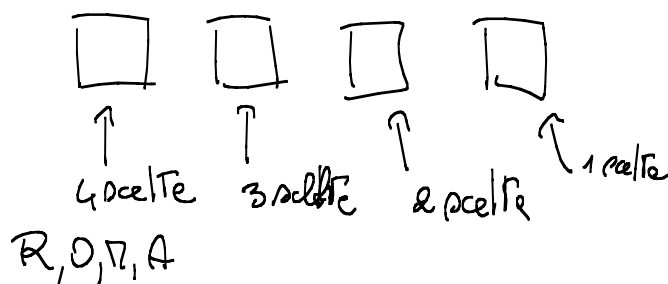
$D_{n,k}^r$

Combinazioni

$C_{n,k}$

Esercizio Quanti sono gli anagrammi di ROMA
dim

(penso alle permutazioni)



dunque la risposta è $4! = P_4 = 24$ □

Esercizio Quanti sono gli anagrammi della parola

MATEMATICA
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

dim

NON POSSO dire che questo numero è 10!
infatti ci sono delle lettere ripetute
ovvero

MATEMATICA e MATEMATICA

Considero l'insieme delle lettere che compongono la

parola $\{M_{(2\text{ volte})}, A_{(2\text{ volte})}, T_{(2\text{ volte})}, E, I, C\}$

ovvero ci sono 6 lettere $\neq$ soltanto. La soluzione è 2

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} \quad \square$$

$\uparrow$ 2 volte T $\uparrow$ 3 volte A $\uparrow$ 2 volte T

Esercizio In quanti modi posso suddividere 15 palline $\neq$ in 3 mucchi
 1 da 7 , 1 da 5 , 1 da 3
dim

Trovare un mucchio da 7 $\Leftrightarrow$ trovare un sottoinsieme di 7 elementi (da 15)

Trovare un mucchio da 5 $\Leftrightarrow$ trovare un sottoinsieme di 5 elementi (da 8)

" " " " 3 $\Leftrightarrow$ trovare un sottoinsieme di 3 elementi (da 3)

Il numero cercato è $\binom{15}{7} \cdot \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} =$
 $= \frac{15!}{7! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{15!}{7! \cdot 5! \cdot 3!}$

(è come se avessi fatto tutte le permutazioni di 15 el.t.
 e poi avessi diviso per dei vari ripetuti;
 ovvero è come se volessi enumerare una
 parola di 15 lettere in cui 7 lettere sono $\equiv A$
 5 " " $\equiv B$
 3 " " $\equiv C$)

Cerco il moccichetto da 5 nell'insieme di 15 el.t. $\rightarrow \binom{15}{5}$ ³

" " " " 3 " " 10 " $\rightarrow \binom{10}{3}$

" " " " 7 " " 7 " $\rightarrow \binom{7}{7}$

$$\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{7} = \frac{15!}{5! \cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{3! 7!} = \frac{15!}{3! 5! 7!}$$

è anche uguale a

$$\binom{15}{3} \binom{12}{5} \binom{7}{7} = \dots = \frac{15!}{3! 5! 7!} \quad \boxed{111}$$

Dunque

$$\binom{15}{3} \binom{12}{5} = \binom{15}{5} \binom{10}{3} = \binom{15}{7} \binom{8}{3} = \binom{15}{3} \binom{12}{7} \\ = \binom{15}{7} \binom{8}{5} = \binom{15}{5} \binom{10}{7}$$

Probabilità (Finale) di un evento $\equiv \frac{\text{Casi Favorevoli}}{\text{Casi Possibili}}$

Probabilità di fare 6 al superenalotto

Ho 30 numeri e devo azzeccarne 6 (non è importante l'ordine)

Casi Possibili $\equiv$ tutti i modi in cui si può estrarre un sottoinsieme di 6 el.t. da un insieme di 30

$$\equiv \binom{30}{6}$$

Casi Favorevoli $\equiv 1$

$$Prob. = \frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{6! \cdot 84!}{90!} = \frac{6!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}$$

Esercizio Quanti sono i numeri di 4 cifre ordinati in modo decrescente
dim

4321 3210 9810 etc

9876, 05, 04, 03, 02, 01, 00 7

9865, 4, 3, 2, 1, 0 6

9854, 3, 2, 1, 0 5

9843, 2, 1, 0 4

9832, 1, 0 3

98210 2

9810 1

Faticoso & lungo
 Altro modo

Considero un insieme di 4 elementi
 Osserviamo che, essendo le cifre decrescenti,
 allora sono tutte diverse

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ e il numero è $a_1 a_2 a_3 a_4$

l'insieme $\{1, 3, 2, 5\} \rightarrow 5321$ 1° numero

" " $\{0, 3, 6, 9\} \rightarrow 9630$ 1° "

esiste $\phi: \{\text{attribuzioni 4 d.t.}\} \rightarrow \{\text{u.ri con cifre decrescenti}\}^5$
 che è biunivoca

I numeri di 4 cifre con le cifre decrescenti sono
 $\binom{10}{4}$ 

Problema: lanciando due dadi, quale è
 la probabilità che esca un numero pari
dim
 Le possibili uscite

$\boxed{1} \boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}$ $\begin{cases} 3 \text{ pari} \\ 3 \text{ dispari} \end{cases}$

$\boxed{2} \boxed{1}, \boxed{2}, \dots$ $\begin{cases} 3 \text{ pari} \\ 3 \text{ dispari} \end{cases}$

$\dots$
 $\boxed{6} \boxed{1}, \boxed{2}, \dots$ $\begin{cases} 3 \text{ pari} \\ 3 \text{ dispari} \end{cases}$

Casi possibili sono 36 $\begin{cases} 18 \text{ pari} \\ 18 \text{ dispari} \end{cases}$

CASI FAVOREVOLI sono 18

$$P \equiv \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \square$$

Problema lanciando 2 dadi, quale è il
 numero che esce con maggiore probabilità?
dim

Il numero + piccolo 2

Il numero + grande 12

$$\frac{2+12}{2} = 7$$

6

quante volte esce 2 $\rightarrow$ 1+1 1 volta $\rightarrow$ 12

" " " 3 $\rightarrow$ 1+2
2+1 2 volte $\rightarrow$ 11

" " " 4 $\rightarrow$ 1+3
2+2
3+1 3 volte $\rightarrow$ 10

" " " 5 $\rightarrow$ 1+4
2+3
3+2
4+1 4 volte $\rightarrow$ 9

" " " 6 $\rightarrow$ 1+5
2+4
3+3
4+2
5+1 5 volte $\rightarrow$ 8

" " " 7 $\rightarrow$ 1+6
2+5
3+4
4+3
5+2
6+1 6 volte

3 dadi : quale è il numero + probabile?

M.N. minimo $\equiv 3$

M.N. max $\equiv 18$

$$\frac{3+18}{2} = 10,5 \quad \left. \begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix} \right\} \text{sono equiprobabili (da provare)}$$

4 dadi $\rightarrow$ $\frac{4+24}{2} = 14$ M.N. più probabile in uscita (da provare)

7
Esercizio Sono date $n+2$ palline di cui

n sono nere $\rightarrow$

2 sono rosse

In quanti modi posso allinearle in modo che
la prima e l'ultima pallina siano nere

dim

Comincio prendendo n piccolo per capire

$n=1$: impossibile perché voglio pallina nera iniziale e finale

$n=2$  1 solo possibile allineamento

$n=3$    $\binom{3}{2}=3$ allineamenti

$n=4$    $\binom{4}{2}=6$ allineamenti
  

$n=5$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$n=6$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

n i possibili allineamenti sono $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

in quanto 1 allineamento $\leftrightarrow$ scelta di 1 sottoinsieme di
2 elementi da un insieme
di n elementi



Problema: Un sacchetto contiene 2 palline blu e "m" di palline rosse. Estruendo 2 palline a caso, la probabilità che queste siano blu è $\frac{1}{21}$. Quante sono le palline rosse
dim

Le palline contenute nel sacchetto sono $m+2$
 $m \equiv$ n. ro palline rosse

Scegliere 2 palline equivale a scegliere un sottoinsieme di 2 elementi da un insieme di $m+2$ elementi
 e questo si fa in $\binom{m+2}{2}$ modi

$$\text{Probabilità evento} \equiv \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi Possibili}} = \frac{1}{\binom{m+2}{2}} = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow 21 \equiv \binom{m+2}{2} = \frac{(m+2)!}{2! \cdot m!} = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$$

$$42 = m^2 + 3m + 2$$

$$m^2 + 3m - 40 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{16}{2} = -8 \\ \frac{10}{2} = 5 \end{array} \right) \Rightarrow m = 5$$

Esercizio: In un magazzino ci sono 50 scatole,
45 piene e 5 vuote.

1) Prendendo 6 scatole, quale è la probabilità che siano piene?

2) " 6 " " " " " 2 siano vuote?

3) " 6 " " " " " 3 " "



Casi Possibili $\equiv$ In quanti modi posso (estraggo) 6 scatole
da 50 scatole date

$\equiv$ Quanti sono i sottoinsiemi
di 6 elementi, da un insieme di 50

$$\equiv \binom{50}{6}$$

Casi Favorevoli $\equiv$ voglio 6 scatole piene

$\equiv$ sottoinsiemi di 6 elementi

da un insieme di 45 el.t.

$$\equiv \binom{45}{6}$$

$$\text{Probabilità (6 scatole piene)} \equiv \frac{\binom{45}{6}}{\binom{50}{6}} = \frac{45!}{\cancel{6!} 39!} \cdot \frac{\cancel{6!} 44!}{50!}$$

$$\equiv \frac{44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}$$

Come avere 2 scatole vuote
4 " piene

$$2 \text{ scatole vuote} \quad \binom{5}{2}$$

$$4 \text{ " piene} \quad \binom{45}{4}$$

$$\text{Probabilità (4 piene, 2 vuote)} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{4}}{\binom{50}{6}}$$

$$\text{Probabilità (3 vuote, 3 piene)} = \frac{\binom{5}{3} \binom{45}{3}}{\binom{50}{6}}$$

