

P_n $\equiv$ n.ro di permutazioni di un insieme di n el.ti
distinti,
 $\equiv n!$

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (n-1)! \cdot n & n>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (2) \cdot 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

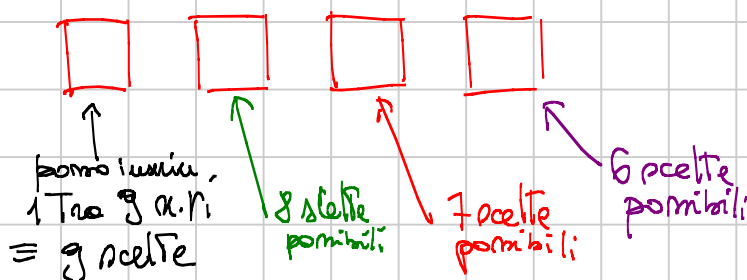
La permutazione è legata all'ordine di n elementi
infatti.

In quanti modi posso ordinare 3 el.ti? $3!$

$D_{n,k}$ = disposizioni (senza ripetizione) di k el.t.
presi da un insieme di n elementi $\neq$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pb: quanti numeri di 4 cifre $\neq$ posso formare
a partire da i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?



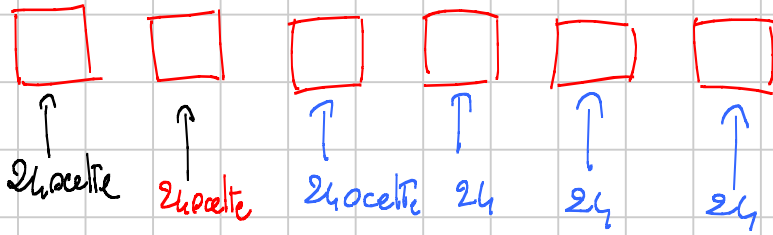
$$D_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

$\uparrow$
 $9-4+1$

Disposizioni di k ~~oggetti~~ presi da n oggetti
con ripetizione

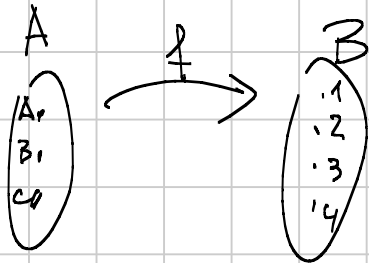
$$D_{n,k}^r = n^k$$

Pb: quante parole di 6 lettere posso formare
a partire da un alfabeto di 24 lettere 2)



$$D_{24,6}^2 = \underbrace{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24}_{6 \text{ volte}} = 24^6$$

Pb: Se A è formato da 3 elti $\neq A = \{A, B, C\}$
B " " " 4 " $\neq B = \{1, 2, 3, 4\}$



Quante funzioni
posso costruire?

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 4 \text{ modi} \\ B &\rightarrow 4 \text{ " } \\ C &\rightarrow 4 \text{ " } \end{aligned} \Rightarrow \text{N.ro fun} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

$$D_{4,3}^2$$

Pb: Quante sono le possibili uscite al Totocalcio

Risposta $14^3 = D_{14,3}^2$

Oss: Qual'è la probabilità di fare 6 al
rosso ruotato

$$P = \left(\frac{1}{80} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86} \cdot \frac{1}{85} \right) 6! \sim 1,6 \cdot 10^{-9}$$

$$P = \frac{20}{7 \times 10^9} \approx 3 \cdot 10^{-9}$$

COMBINAZIONI

Pb: Quanti sono i sottoinsiemi $A = \{a, b, c\}$

i) di 0 elti da un insieme di 3 elti

ii) di 1 " " " " " 3 "

iii) di 2 " " " " " 3 "

iv) di 3 " " " " " 3 "

i) sottoinsiemi di 0 elti $\equiv 1$: l'insieme vuoto $\emptyset$ (*)

ii) " " 1 " $\equiv 3$ $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

iii) " " 2 " $\equiv 3$ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

iv) " " 3 " $\equiv 1$: A stesso

8

Prendiamo $A = \{a, b, c, d\} \leftarrow 4 \text{ elti}$

i) sottoinsiemi 0 elti : 1, il vuoto $\emptyset$

ii) " 1 " : 4 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

iii) " 2 " : 6 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

iv) " 3 " : 4 $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

1) " 4 " : 1 : A stesso
 ⋮

4

I sottoinsiemi di k elementi da un insieme di n elementi sono

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \equiv \text{Combinazioni di } k \text{ el.t. presi da un insieme di } n \text{ el.t.}$$

$$n=4 \quad C_{4,0} = \frac{4!}{0! 4!} = 1 \quad C_{4,1} = \frac{4!}{1! (4-1)!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \quad C_{4,3} = \frac{4!}{3! (4-3)!} = 4$$

$$C_{4,4} = \frac{4!}{4! (4-4)!} = 1$$

quindi ho tentato le formule nel caso n=4

Teorema (ϕ , vuoto, è sottoinsieme di V insieme)

$\phi \subseteq A$ Qualsiasi sia A

dimo

Voglio provare $\phi \subseteq A$, ovvero che $\forall x \in \phi, x \in A$
 cercando

$$\text{non } (\forall x \in \phi, x \in A) \Leftrightarrow \underline{\underline{\exists x \in \phi : x \notin A}}$$

ma ϕ non ha el.t.: **ASSURDO** $\Rightarrow \exists$ $\square$

Lemma tra numero combinazioni e di disposizioni di k oggetti da n

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

Infatti, se $\{a,b,c\}$ è un sottoinsieme di $\{a,b,c,d\}$

ad $\{a,b,c\}$ sono legate 6 disposizioni

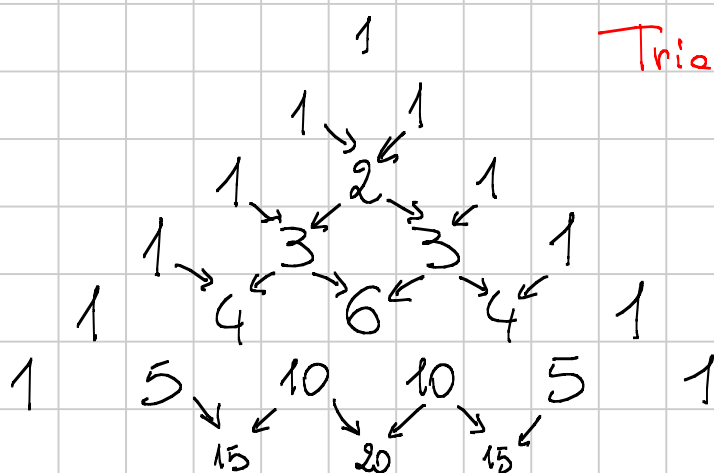
$\begin{array}{l} a b c \\ a c b \\ b a c \\ b c a \\ c a b \\ c b a \end{array}$

il n.ro di sottoinsiemi di 3 el. di un insieme di 4

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

è legato il n.ro delle disposizioni (permut.) di 3 oggetti scelti da un insieme di 4

$$D_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 3! \cdot C_{4,3} = 24$$



Triangolo di Tartaglia

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{0,0} & & \\
 & C_{1,0} & & C_{1,1} & \\
 C_{2,0} & & C_{2,1} & & C_{2,2} \\
 & C_{3,0} & & C_{3,1} & & C_{3,2} & & C_{3,3}
 \end{array}$$

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$$

$$C_{1,0} = \frac{1!}{0!1!} = 1 = C_{1,1}$$

$$(a+b)^5 = C_{5,0} \cdot a^5 + C_{5,1} \cdot a^4 b + C_{5,2} \cdot a^3 b^2 + C_{5,3} \cdot a^2 b^3 + C_{5,4} \cdot a b^4 + C_{5,5} b^5$$

$$(a+b)^{100} = C_{100,0} \cdot a^{100} + C_{100,1} \cdot a^{99} b + C_{100,2} \cdot a^{98} b^2 + \dots$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} C_{n,k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \cdot a^{5-k} b^k$$

Il simbolo $\sum_{k=0}^n a_k$

$$\sum_{k=0}^n a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{n+1 \text{ termini}}$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{k=2}^4 (k+1)^3 = (2+1)^3 + (3+1)^3 + (4+1)^3$$

$$\sum_{k=-1}^2 \frac{1}{k+3} = \frac{1}{-1+3} + \frac{1}{0+3} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{2+3}$$

$$\sum_{k=1}^3 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sum_{k=3}^7 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

$$C_{1,0} + C_{1,1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \frac{1}{0!1!} + \frac{1}{1!0!} = 1+1=2 = \binom{2}{1}$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \frac{2!}{0!2!} + \frac{2!}{1!1!} = 1+2=3 = \binom{3}{1} \quad C_{2,1}$$

$$\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \frac{2!}{1!1!} + \frac{2!}{2!0!} = 2+1=3 = \binom{3}{2}$$

In generale

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \right\}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k-1)! (n-k)} + \frac{n!}{k! (k+1) (n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)n! + n! (n-k)}{k! (k+1) (n-k-1)! (n-k)} = \frac{n! (n+1)}{(k+1)! (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \binom{2}{0} & \leftarrow & \binom{2}{1} & \leftarrow & \binom{2}{2} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \binom{3}{0} & \leftarrow & \binom{3}{1} & \leftarrow & \binom{3}{2} & \leftarrow & \binom{3}{3} \end{array}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

Teorema (Binomio di Newton)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

dim (per induzione)

$$n=1 \quad (a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \quad \checkmark$$

Valgo per n (ipotesi induttiva) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ |||||

Voglio provare che $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

↑
ipotesi induttiva

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} \cdot \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$\boxed{k+1=h}$$

$$k=0 \rightarrow h=1$$

$$k=n-1 \rightarrow h=n$$

$$= a^{n+1} \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^h + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

↕ per $k=h$

$$= a^{n+1} \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{a^{n+1-k}}_{\substack{\uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow}} b^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema se A ha n elementi
allora $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ ha 2^n elementi
dim

Se A ha n elementi $\binom{n}{0} \equiv$ n.ro sottoinsiemi con 0 el.,
 $\binom{n}{1} =$ " " " 1 "
 $\binom{n}{2} =$ " " " 2 "
 $\vdots$
 $\binom{n}{n} =$ " " " n "

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$
 2^n è il numero dei sottoinsiemi di A
ovvero il n.ro di elementi di $\mathcal{P}(A)$ = insieme delle pot.

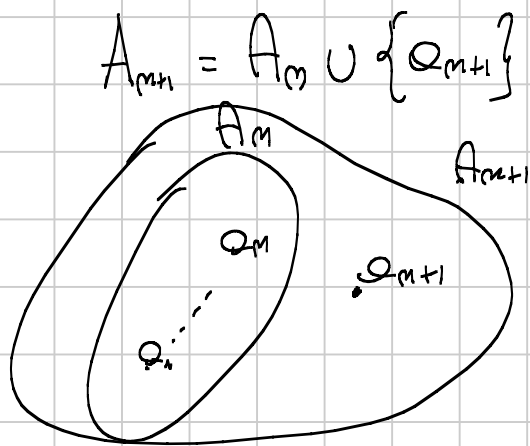
$\equiv$ insieme dei
sottoinsiemi
di A

2^o dimostrazione per induzione su $n \equiv \text{n.ro el.t. di } A$

$n=1$ ovvero $A_1 = \{a_1\}$; A_1 ha 2 sottoinsiemi
il vuoto $\emptyset$
 A_1 stesso
e quindi $2^1 = 2$ n.ro sottoinsiemi vera!

Valgo per n : 2^n n.ro di sottoinsiemi
di un insieme di n el.t.

Voglio provare che 2^{n+1} il n.ro di sottoinsiemi
di un insieme di $(n+1)$ el.t.



$A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ insieme
n elementi
che ha
 2^n sottoinsiemi
per l'ipotesi induttiva

Considero $B \subseteq A_{n+1}$

- $a_{n+1} \notin B \Rightarrow B \subseteq A_n \Rightarrow$ ne trova 2^n
- $a_{n+1} \in B \Rightarrow B = C \cup \{a_{n+1}\} \subseteq A_n$
 $\Rightarrow$ trova 2^n insiemi C
 $\Rightarrow$ " 2^n " $B = C \cup \{a_{n+1}\}$

dunque i sottoinsiemi di A_{n+1} sono

$$2^n + 2^n + 2^{n+1}$$

