

Principio di induzione

$$S \subseteq \mathbb{N} : \begin{array}{l} \text{i) } 1 \in S \\ \text{ii) } m \in S \Rightarrow m+1 \in S \end{array} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Principio del buon ordinamento (del minimo intero)

$$\text{Dato } S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{n} = \min S$$

Oss: Il buon ordinamento "sembra" più "evidente" di quanto lo sia il Principio di Induzione

Teorema (buon ordinamento $\Rightarrow$ induzione)

Se vale il principio del buon ordinamento allora vale il principio di induzione

dim

Per assurdo non vale il principio di induzione

$$\text{non} \left(S \subseteq \mathbb{N} : \begin{array}{l} 1 \in S \\ m \in S \Rightarrow m+1 \in S \end{array} \Rightarrow S = \mathbb{N} \right)$$

$$S \subseteq \mathbb{N} : \begin{array}{l} 1 \in S \\ m \in S \Rightarrow m+1 \in S \end{array} \text{ e } \{ S \neq \mathbb{N} \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus S = B \neq \emptyset \text{ ma vale il buon ordinamento}$$

$$\Rightarrow \exists \bar{b} = \min B \text{ ma } 1 \in S \Rightarrow \bar{b} > 1$$

$$\Rightarrow \exists \bar{b}-1 \in S \text{ ma } (\bar{b}-1)+1 \in S \text{ ASSURDO}$$

$$\bar{b} \in B$$



Oss " $A \Rightarrow B$ " equivale logicamente a " $(\text{non } A) \vee B$ "

dunque " $\text{non}(A \Rightarrow B)$ " equivale logicamente a " $\text{non}[(\text{non } A) \vee B]$ "
 cioè equivale a " $A \wedge (\text{non } B)$ "

Esercizio

Provare che $(100!)^3 - 100!$ è divisibile per 3

dim

Proveremo che $n^3 - n$ è divisibile per 3 $\forall n \geq 2$

$$n=2 \quad 2^3 - 2 = 6 \text{ divisibile per } 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Non serve più} \\ \text{avere} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24 \quad \text{OK} \\ 4^3 - 4 = 64 - 4 = 60 \quad \text{OK} \end{array} \right\}$$

Ipotesi induttiva: $n^3 - n$ è divisibile per 3

Voglio provare che $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

è divisibile *è divisibile per 3*

per 3 in virtù
dell'ipotesi induttiva

$\Rightarrow (n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3

Applicando il risultato a $n = 100!$ ha la Terza $\square$

Esercizio

Calcolare la seguente somma

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{10000}\right)$$

dim

nessuno vuole calcolare un prodotto con 99 fattori

$$f(100) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(100)^2}\right)$$

$$f(n) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 2$$

$$f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \quad f(3) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = f(2) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3} = \frac{3+1}{2 \cdot 3}$$

$$f(4) = f(3) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2 \cdot 4} \quad f(5) = f(4) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{3}{5} = \frac{5+1}{2 \cdot 5}$$

$$f(6) = f(5) \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{12} = \frac{6+1}{2 \cdot 6}$$

$$\vdots$$

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} \quad ||| \text{ CONGETTURA (spero che sia vero!)} \quad \checkmark$$

Per provare che $f(n) = \frac{n+1}{2n}$ uso il principio di induzione

$$n=2 \quad f(2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \quad \underline{\underline{\text{Vero}}}$$

Ipotesi induttiva: suppongo che $f(n) = \frac{n+1}{2n}$

Voglio provare che $f(n+1) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$

$$f(n+1) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}_{f(n) = \frac{n+1}{2n} \text{ per ipotesi induttiva}} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n^2 + 2n}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n(n+2)}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} \quad \text{cioè la tesi}$$

$$\text{Dunque } f(100) = \frac{101}{200}$$



Progressione Geometrica

$$1, q, q^2, q^3, q^4, \dots$$

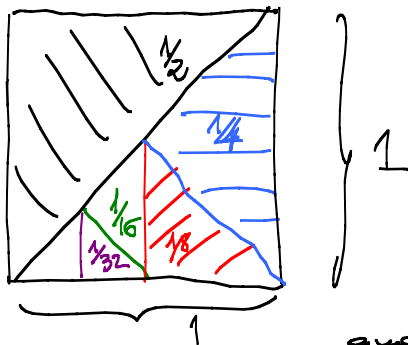
Quando si è presentato il seguente Pb
calcolare

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \infty$$

↑
dice
Zenone

Non è vero quanto assertedo da Zenone poiché

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$



Valio calcolare, $\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{\text{quando } q \in \mathbb{R} \text{ generico}} = S_n$

$$\begin{aligned} S_n (1-q) &= (1+q+q^2+\dots+q^n) (1-q) \\ &= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} + \\ &\quad - \cancel{q} - \cancel{q^2} + \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q \neq 1 \quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$q = 1 \quad S_n = 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = n+1$$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esercizio

Prova per induzione che $S_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 5

dim

$$n=1 \quad S_1 = 1+q = \frac{1-q^2}{1-q} \quad q \neq 1$$

$$= 2 \quad q = 1$$

Vera

ipotesi induttiva: suppongo che $S_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

Voglio provare che $S_{n+1} = \begin{cases} \frac{1-q^{n+2}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+2 & q = 1 \end{cases}$

$$q=1 \quad S_{n+1} = \underbrace{1+1+\dots+1}_S + 1^{n+1} = S_n + 1 = (n+1)+1 = n+2$$

ipotesi induttiva

$$q \neq 1 \quad S_{n+1} = \underbrace{1+q+q^2+\dots+q^n}_S + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} =$$

applico ipotesi induttiva

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$



Prova in itinere del 10 novembre

- sarà valida per l'esame della prova Quiz
- non c'è un punteggio minimo nelle prove
ma c'è un punteggio minimo nelle
somme dei risultati delle 2 prove in itinere

~ 25

minimo a 2 prove -14

max " " " 42

- la seconda prova in itinere sarà
dopo la befana ma prima del primo appello

Esercizio (MOLTO IMPORTANTE)

6

Prova che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

N.B. Questo è fondamentale per calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

dim
 $n=1 \quad \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 < \frac{9}{4} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{vero!!}$

facciamo $n=2$ (che non serve) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$

non serve
 Suppongo che $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 (per $n \geq 2$)

Voglio provare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ $\$$

Segue che $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

Segue che $\left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$

Segue che $\frac{n}{n+1} < \left(\frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+2n+1)-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$

Segue che $\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) < \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$

Segue che $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$

$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a \quad a \neq 0 \quad a > -1$ disuguaglianza di Bernoulli

ma $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$ e $\neq 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$



Permutazioni

Parliamo di anagrammi

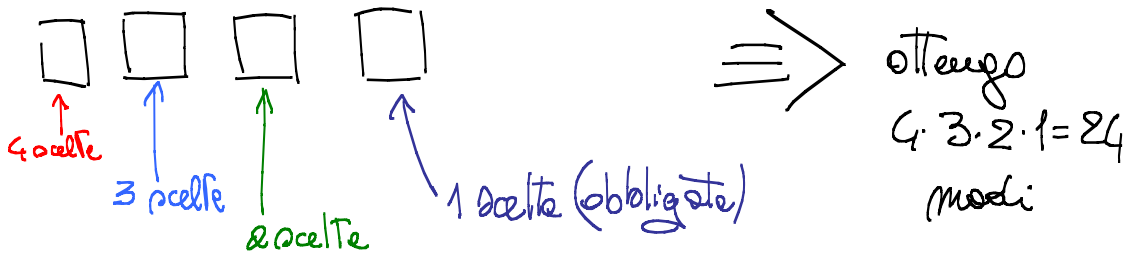
In quanti modi posso anagrammare la parola

UGO
 UOG
 GUO
 GOU
 OGU
 OUG

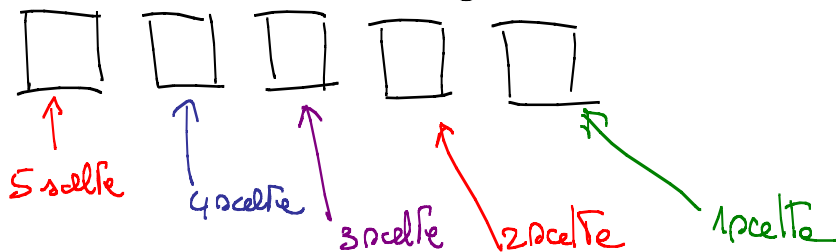
} 6 parole diverse

e se lo faccio con
ALDO

quante ne trovo? me li voglio conoscere
uno per uno, voglio il numero di anagrammi



Problema devo anagrammare ATORE



$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 24 = 120 \text{ scelte}$$

⋮

Quando devo ordinare "n" oggetti distinti,
i possibili ordinamenti sono
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$P_n \equiv$ numero di permutazioni di n oggetti
 (" " ordinamenti " " " distinti)

$$\equiv n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Def dato $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, diciamo
 "fattoriale di n " il numero $n!$
 così definito

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (n-1)! \cdot n & n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{definizione ricorsiva})$$

Qss: definizione di $n!$ è ricorsiva in quanto
 Per calcolare $5!$ devo calcolare $4!$
 " " " $100!$ " " " $99!$

 " " " $n!$ " " " $(n-1)!$

DISPOSIZIONI

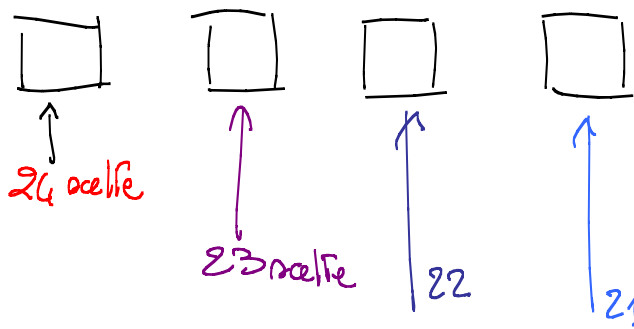
Con un alfabeto di 24 lettere, quante
 parole, formate da 4 lettere $\neq$, potrà
 costruire?

$\{A, B, C, D, E, F, \dots\} \equiv 24$ lettere

$\left. \begin{array}{l} ABCD \\ ABDC \\ AD BC \end{array} \right\} 24$
 $\left. \begin{array}{l} ABCE \\ \vdots \end{array} \right\} 24 \dots$ in questo modo è
 MOLTO

faticoso contare
 quante parole posso
 costruire

procediamo come segue



$\Rightarrow 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ scelte possibili

$$D_{24,4} \equiv \overset{\text{numero di}}{\text{disposizioni (senza ripetizione) di 4}} \\ \text{oggetti presi da un insieme di 24} \\ \text{oggetti} \\ = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{24!}{(24-4)!}$$

in generale

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Problema Dato un insieme di $[4]$ elementi

- quanti sono i sottoinsiemi con 0 el.T.

- " " " " " 1 "

- " " " " " 2 "

- " " " " " 3 "

- " " " " " 4 "

Calcolate poi il numero di sottoinsiemi

- con $\emptyset$ el.T.

- " 1 "

- " 2 "

- " 3 "

- " 4 "

- " 5 "

quando l'insieme di partenza ha 5 el.T.