$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) f pari, g pari $\Rightarrow$ $f \cdot g$ è pari

infatti $(f \cdot g)(-x) = f(-x)\, g(-x) = f(x)\, g(x) = (f g)(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) f dispari, g pari $\Rightarrow$ $f \cdot g$ è dispari

infatti $(f g)(-x) = f(-x)\, g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -(f g)(x)$

3) f dispari g dispari $\Rightarrow$ $f \cdot g$ è pari

infatti $(f \cdot g)(-x) = f(-x)\, g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = (f g)(x)$

4) f pari, g pari $\Rightarrow$ $f+g$ è pari

infatti $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5) f dispari, g pari $\Rightarrow$ $f+g$???

infatti $f = x$ $g = -x^2$ $\Rightarrow$ $(f+g)(x) = x - x^2$

non è né pari né dispari $(-x) - (-x)^2 = -x - x^2 \neq f(x)$

$\neq f(-x)$

6) f dispari g dispari $\Rightarrow$ $f+g$ è dispari

immediato

6) f crescente, g crescente $\Rightarrow$ $f \cdot g$???

$f = x = g$ sono crescenti ma $f \cdot g = x^2$ né crescente

" decrescente

$f = -e^{-x} = g$ sono " ma $f \cdot g = e^{-2x}$ è decrescente

$f = g = e^x$ " " ma $f \cdot g = e^{2x}$ è crescente

7) f crescente, g crescente, $f, g \geq 0$ $\Rightarrow$ $f \cdot g$ crescente

infatti $x < y \Rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \leq f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(y)$

e così via. Possiamo pensare a una miriade di problemi di tal fatta.

Vediamo anche che

8) f crescente g decrescente $\Rightarrow (g \circ f)$ è decrescente

infatti

$$x<y \underset{\uparrow f \uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(y) \underset{\uparrow g \downarrow}{\Rightarrow} g(f(x)) > g(f(y))$$

dunque $g \circ f$ è decrescente

9) f crescente g decrescente $\Rightarrow$ $f \circ g$ decrescente

infatti $x<y \Rightarrow g(x)>g(y) \Rightarrow f(g(x)) > f(g(y))$

ovvero $f \circ g$ è decrescente

10) f, g decrescenti $\Rightarrow$ $g \circ f$ è crescente

$f \circ g$ " crescente

infatti $x<y \Rightarrow f(x)>f(y) \Rightarrow g(f(x)) < g(f(y))$

Anche qui possiamo pensare a diversi problemi

Abbiamo visto

crescenza/decrescenza stretta o debole
parità/disparità
iniettività/suriettività
periodicità

} Proprietà GLOBALI

Derivabilità
continuità
limiti

} Proprietà LOCALI (puntuali)

(la continuità/derivabilità/limite si fanno in un punto x_0)

GLOBALE $\equiv$ proprietà definita su un insieme

Oss: quando dico "f crescente" intendo "f crescente su A" in quanto la def. è

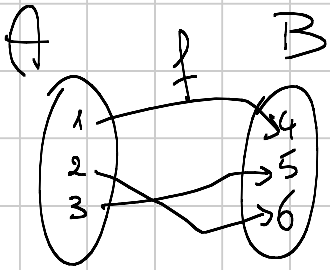
$$\forall x,y\in A \quad x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$$

Def: $f:A\to B$ si dice biettiva (o biunivoca)

se f è iniettiva $\left(\forall x,y\in A \quad x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)\right)$

f è suriettiva $\left(\forall y\in B \quad \exists x\in A : f(x)=y\right)$

$\left(f(A)=\{y : \exists x\in A \ f(x)=y\}=B\right)$



un esempio di f.ne biunivoca tra A e B

Oss una funzione biunivoca è detta anche $1-1$, ovvero

$$\begin{cases} \forall x\in A \quad \exists!\, y\in A : f(x)=y & (\text{iniettività}) \\ f(A)=B & (\text{suriettività}) \end{cases}$$

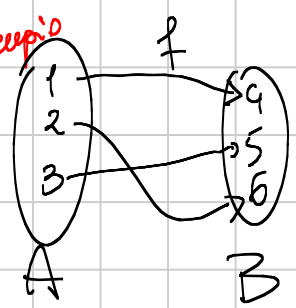
Def: (funzione inversa)

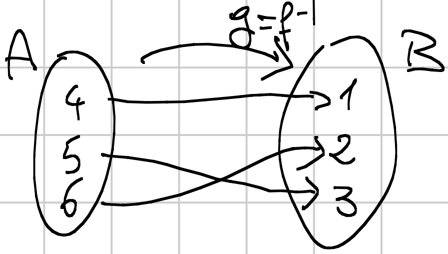
Data $f:A\to B$ biunivoca, diciamo $g:B\to A$

"la funzione inversa di f" e la indichiamo con $g=f^{-1}$

se $(f\circ g)(y)=y \quad \forall y\in B \qquad (g\circ f)(x)=x \quad \forall x\in A$

Esempio





Oss: dal contesto deve essere chiaro che $f^{-1}(x)$ è l'inversa, ovvero $(f\circ f^{-1})(y)=y$ $(f^{-1}\circ f)(x)=x$
e non è $\frac{1}{f(x)}$, che è il reciproco

ovvero $\frac{1}{f(x)}$ non è (in generale) l'inverso di $f(x)$

Esempio

Da $f(x)=e^x$, questa $f:\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[$
risulta strettamente crescente (e quindi iniettiva)
ed inoltre è suriettiva (dimostreremo più avanti)

$\Rightarrow f(x)=e^x$ è invertibile e $f^{-1}(y)=\log_e(y)=\log(y)$

è la funzione inversa $f^{-1}=\log:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$

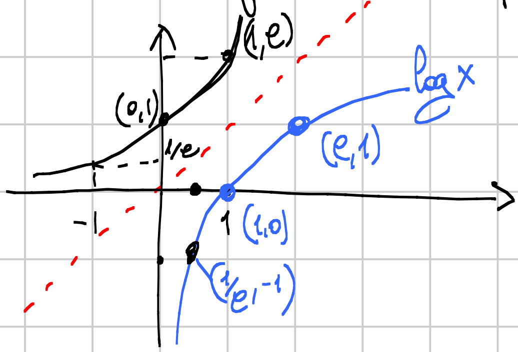
e $(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=e^{\log(y)}=y\quad\forall y>0$

$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=\log(e^x)=x\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Def $f:A\to B$ funzione, diciamo

Grafico(f) = grafico di $f=\{(x,f(x)) : x\in A\}$
$\subseteq\mathbb{R}^2$

Grafico di $f = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$



$f : A \to B \quad f^{-1} : B \to A$

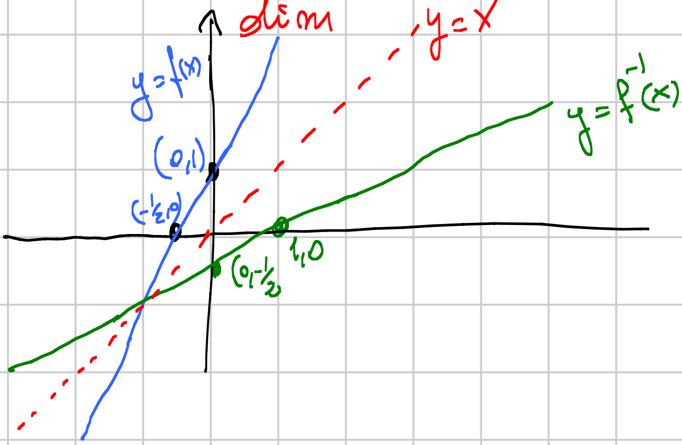
$$\text{Grafico di } f^{-1} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\}$$
$$= \{(f(x), f^{-1}(f(x))) : x \in A\}$$
$$= \{(f(x), x) : x \in A\}$$

$$\text{Grafico di } f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

ovvero $(a,b) \in \{(f(x), x) : x \in A\} \Leftrightarrow (b,a) \in \{(x, f(x)) : x \in A\}$

Esempio disegnare grafico di f e f^{-1} dove $f(x) = 2x+1$

dim



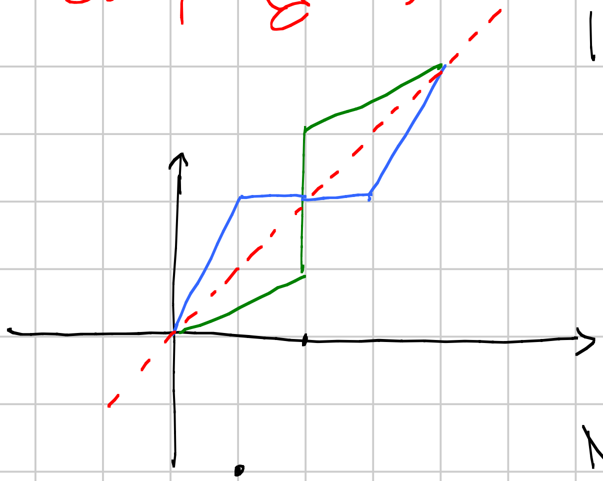
$$y = 2x+1$$
$$\Downarrow$$
$$y - 1 = 2x$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = x$$
$$x = f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow$ la funzione inversa $x \to f^{-1}(x)$ è

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

OSS Non tutte le funzioni sono invertibili (ovvero non sempre $\exists f^{-1}$!)

Esempio (grafico)



Il grafico in blu è grafico della fun

$$f = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x \le 3 \\ 2x-4 & 3 < x \le 4 \end{cases}$$

mentre il grafico in verde NON È grafico di nessuna funzione

infatti, a $x=2 \longrightarrow [1,3]$

Cosa manca a f per essere invertibile?

f è crescente, ma non strettamente, ed è in particolare costante tra $x=1$ e $x=3$, e dunque f

NON È INIETTIVA

$\mathbb{N}$, i numeri naturali

Contare significa mettere in corrispondenza il nostro insieme di oggetti con un sottoinsieme opportuno di $\mathbb{N}$, ovvero

$A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$ questo ha 3 elementi

per affermare questo, voi costruite

$f : \{1,2,3\} \longrightarrow A \qquad 1 \longrightarrow \square \qquad 2 \longrightarrow \triangle \qquad 3 \longrightarrow \bigcirc$

Assiomi di PEANO

1) 1 è un numero ($1 \in \mathbb{N}$)

2) il successore di ogni numero è un numero
($n \in \mathbb{N}$, $s(n) \in \mathbb{N}$)

3) due numeri diversi hanno successori diversi
($n, m \in \mathbb{N} \quad n \neq m \Rightarrow s(n) \neq s(m)$)

4) ogni numero $\neq 1$ è successore di qualche numero

$(n \neq 1 \Rightarrow \exists m : s(m) = n)$

5) Principio di Induzione

"$S \subseteq \mathbb{N}$ i) $1 \in S$ $\Rightarrow S = \mathbb{N}$"
ii) $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$

N.B. $s(n)$ = il successore di n $\equiv n+1$

OSS: i numeri naturali sono infiniti, e quindi se voglio dimostrare una formula che vale $\forall n \in \mathbb{N}$, dovrei provare ∞ casi : IMPOSSIBILE

Esempio (Disuguaglianza di Bernoulli)

Provare che $(1+a)^n \geq 1+na$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall a > -1$

dim

quando $n=1$ $(1+a)^1 = (1+a) \geq 1+a$ Vera

proviamo per $n=2$,
$$(1+a)^2 = 1+a^2+2a \underset{a^2 \geq 0}{\geq} 1+2a \quad \text{Vera}$$

Suppongo che valga per n, cioè $(1+a)^n \geq 1+na$ (ipotesi induttiva)

Voglio provarlo per $n+1$

$$(1+a)^{n+1} = \underbrace{(1+a)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{poiché } a>-1}}(1+a)^n \underset{\substack{\text{applico} \\ \text{ipotesi induttiva}}}{\geq} (1+a)(1+na) = 1+a+na+a^2 \underset{a^2 \geq 0}{\geq} 1+(n+1)a$$

Per il principio di induzione

$S = \{n : (1+a)^n \geq 1+na \ \forall a > -1\} = \mathbb{N}$ ///

Esercizio

Provare che $3^{1000} - 2^{500}$ è divisibile per 7

dim

La verifica diretta è complessa (troppi calcoli)

Conviene introdurre $f(n) = 3^{2n} - 2^n$, osservo che

$f(1) = 3^2 - 2^1 = 7$, $f(2) = 77$ e tento di provare

$f(n)$ divisibile per 7 $\forall n \geq 1$

e il problema di partenza diventa il caso $n = 500$

Per induzione

$n=1$ $\quad f(1) = 3^2 - 2^1 = 7$ è divisibile per 7 ✓

Ipotesi induttiva $\quad f(n)$ " " " "

Proviamo che $f(n+1)$ " " " "

$$f(n+1) = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^n$$

$$= 3^2 3^{2n} - 2 \cdot 2^n + 3^2 \cdot 2^n - 3^2 \cdot 2^n$$

$$= 3^2 \left(3^{2n} - 2^n\right) + 2^n \cdot \left(3^2 - 2\right)$$

$$= 3^2 \cdot \underbrace{f(n)}_{\substack{\text{divisibile per} \\ \text{7 per l'ipotesi} \\ \text{induttiva}}} + 2^n \cdot \underbrace{f(1)}_{\substack{\text{è uguale a 7} \\ \text{quindi divisibile} \\ \text{per 7}}}$$

$\Rightarrow f(n+1)$ è divisibile per 7 $\blacksquare$

Esercizio (Proposto)

Provare che $(100!)^3 - 100!$ è divisibile per 3