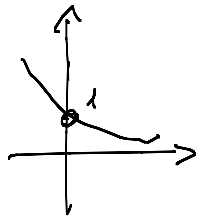
Def (monotonia)

$f: A \to \mathbb{R}$ si dice strettamente/debolmente monotona se f strettamente/debolmente crescente (decrescente)

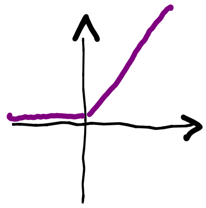
Esempio

$f(x) = x^3$ è strett. crescente

$g(x) = e^{-x}$ " " decrescente

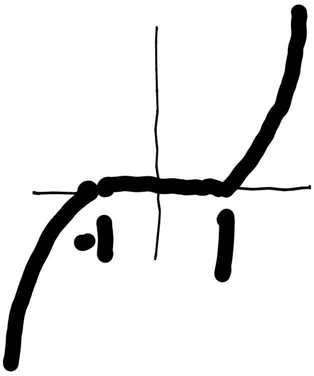


$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



debolmente crescente

debolmente crescente $\to$
$$t(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x > 1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ -(x+1)^2 & x < -1 \end{cases}$$



$-t(x)$ è debolmente decrescente

Def $f: A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

oppure

$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Def. equivalenti di iniettività

Domanda: che legame c'è tra monotonia stretta e iniettività?

1) monotonia $\Rightarrow$ iniettività? NO

2) monotonia stretta $\Rightarrow$ iniettività? SÌ

3) iniettività $\Rightarrow$ monotonia (stretta o debole)? (per ora) NO

① Proviamo che Monotonia $\not\Rightarrow$ iniettività

infatti $f(x) = 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ è debolmente monotona
ma
non è iniettiva

② Proviamo che stretta monotonia $\Rightarrow$ iniettività

dim

$f: A \to \mathbb{R}$ strett. crescente

$x \neq y \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\qquad\quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

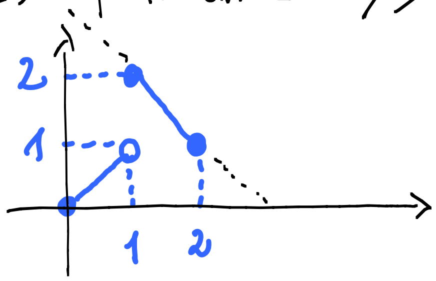
$f: A \to \mathbb{R}$ strett. decrescente

$x \neq y \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\qquad\quad x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

abbiamo la Tesi $\square$

3) f iniettiva $\not\Rightarrow$ f strettamente/debolmente monotona



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Sicuramente f non è monotona
Però è iniettiva

$x, y \in [0,1[\quad x \neq y \Rightarrow f(x) = x \neq y = f(y)$

$x \in [0,1[\quad y \in [1,2] \Rightarrow f(x) = x < 1 \qquad 1 \leq 3-y = f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$x, y \in [1,2] \qquad \Rightarrow f(x) = 3-x > 3-y = f(y) \quad \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Oss: siamo riusciti a costruire il controesempio perché f è discontinua, e infatti vale il seguente Teorema

"$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I
allora
f iniettiva $\underline{\text{se}}$ f strettamente monotona"

Funzioni Periodiche

Def $f: A \to \mathbb{R}$, questa si dice
"periodica di periodo $T>0$"
se
1) $\forall x \in A$, $x+T \in A$
2) $f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in A$

Esempi

$f(x) = \operatorname{sen} x$ è periodica di periodo $T = 2\pi$
$g(x) = \cos x$ " " " " $T = 2\pi$

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{Tg}(x) \qquad h: \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : \overset{k \neq 0}{k \in \mathbb{Z}} \right\} \to \mathbb{R}$$

$\operatorname{Tg}(x)$ ha periodo sicuramente 2π (perchè $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π)

Determiniamo il "minimo periodo" di $\operatorname{Tg}(x)$

$$\operatorname{Tg}(x+T) = \frac{\operatorname{sen}(x+T)}{\cos(x+T)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos T + \operatorname{sen} T \cos x}{\cos x \cos T - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} T}$$

$$\left(x \neq k\frac{\pi}{2}\ k \neq 0\right) = \frac{\operatorname{Tg} x + \operatorname{Tg} T}{1 - \operatorname{Tg} x \operatorname{Tg} T} \underset{\text{voglio}}{=} \operatorname{Tg} x$$

$$\cancel{\operatorname{Tg} x} + \operatorname{Tg} T = \cancel{\operatorname{Tg} x} - \operatorname{Tg}^2 x \operatorname{Tg} T$$

$$\operatorname{Tg} T (1 + \operatorname{Tg}^2 x) = 0 \quad \underline{\text{se}}\ \operatorname{Tg} T = 0 \text{ o } \underbrace{\cancel{1 + \operatorname{Tg}^2 x = 0}}_{\text{mai}}$$

$\underline{\text{se}}$ $T = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

da cui $T = \pi$

Oss: Se f ha periodo T, allora ha periodo $2T$, $3T$, $4T$ etc

ma il viceversa NON È VERO in generale

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen} x$ che ha periodo 2π, però

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \neq \operatorname{sen} x$$

Esempio

Data $f(x) = \operatorname{sen}(3x) + \cos(4x)$, determinarne il minimo periodo

dim

$\operatorname{sen}(3x)$ ha periodo $\frac{2\pi}{3}$

infatti

$$\operatorname{sen}(3(x+T)) = \operatorname{sen}(3x+3T) = \operatorname{sen} 3x \cos 3T + \operatorname{sen} 3T \cos 3x \overset{\text{voglio}}{=} \operatorname{sen} 3x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sen} 3x (\cos 3T - 1) + \operatorname{sen} 3T \cdot \cos 3x = 0$$

$$\lambda \operatorname{sen} 3x + \beta \cos 3x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = \beta = 0$$

voglio $\begin{cases} \cos 3T - 1 = 0 \\ \operatorname{sen} 3T = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 3T = 1 \\ \operatorname{sen} 3T = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3}T_1 = \frac{2\pi}{3}$

$\cos 4x$ ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (si procede come nel caso precedente)

Per avere $T=$ min. periodo della somma, è necessario che T sia un multiplo comune di T_1 e T_2, ma cerco il minimo e dunque

$$T = \text{mcm}\{T_1, T_2\} = \text{mcm}\left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \text{mcm}\left\{\frac{4\pi}{6}; \frac{3\pi}{6}\right\} = \frac{\pi}{6}\,\text{mcm}\{4, 3\}$$

$$= \frac{12}{6}\pi = 2\pi$$

Esercizio (per casa)

Determinare il minimo periodo di

$$f(x) = \text{sen}(2x) + \cos(7x)$$

(per $\text{sen}\, 2x$ trovo il periodo $T_1 = \frac{2\pi}{2}$, per $\cos(7x)$ trovo $T_2 = \ldots$

e quindi trovo $T =$ minimo periodo di $f = \ldots$)

Def $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$

Esempio

$A = [1, 2[\implies -A =]-2, 1]$

$B = [-1, 0] \cup [2, 3] \implies -B = [-3, -2] \cup [0, 1]$

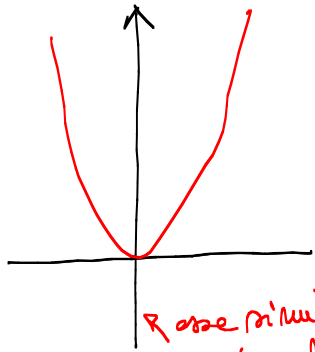
Def $f : A \to \mathbb{R}$ con $A = -A$ diciamo che

f è pari se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A$

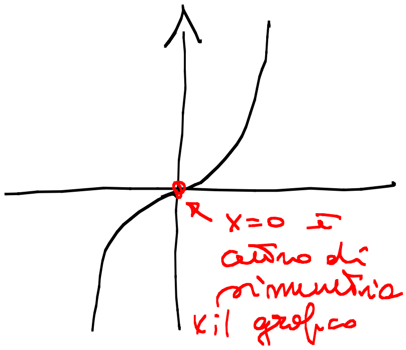
f è dispari se $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempio

$f(x) = x^2$ è una funzione pari



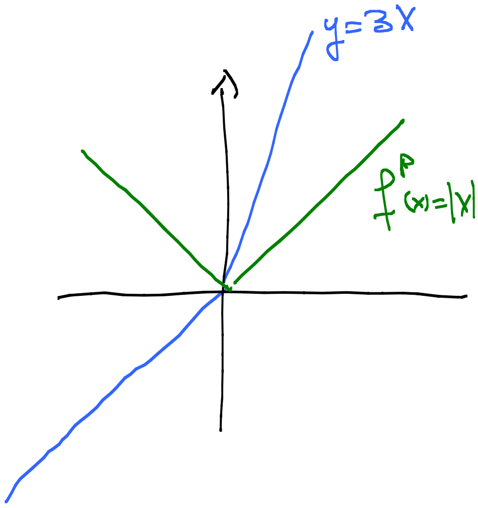
$f(x) = x^3$ è una funzione dispari



$$f^d(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$f^p(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

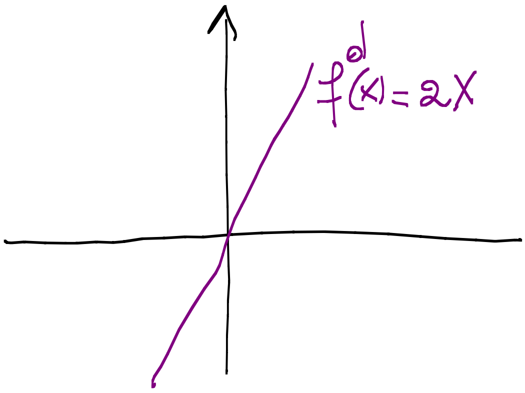
Esempio $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$



f non è pari nè dispari

$$f^p(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + (-x)}{2} & x > 0 \\ \dfrac{x + (-3x)}{2} & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f^d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \begin{cases} \dfrac{3x - (-x)}{2} & x > 0 \\ \dfrac{x - (-3x)}{2} & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2x & x \leq 0 \end{cases}$$

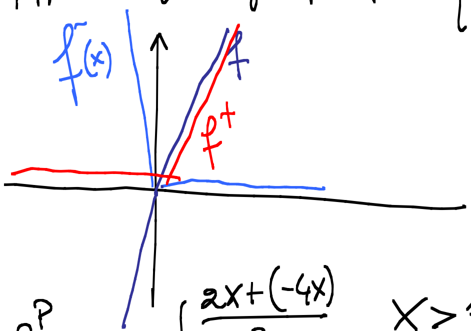


Esempio $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 4x & x \le 0 \end{cases}$ Trovare f^+, f^-, f^p e f^d

dim

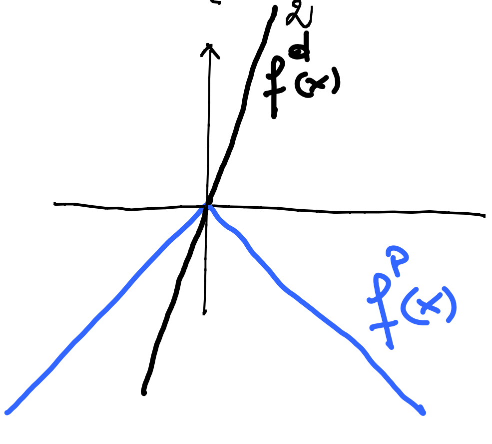
$$f^+ = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad f^- = \max\{-f, 0\} = \begin{cases} -4x & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$|f| = \max\{f, -f\} = f^+ + f^- = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -4x & x \le 0 \end{cases}$$



$$f^p(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + (-4x)}{2} & x > 0 \\ \dfrac{4x + (-2x)}{2} & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases}$$

$$f^d(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - (-4x)}{2} & x > 0 \\ \dfrac{4x - (-2x)}{2} & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x > 0 \\ 3x & x \le 0 \end{cases}$$



OSS f è pari $\Rightarrow f^d(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$ 8

f dispari $\Rightarrow f^p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$

Problemi f è pari e g è pari $\Rightarrow f \cdot g$ è pari

f " dispari e g è dispari $\Rightarrow f \cdot g$ è pari

$f'g+fg'$

f pari e g è pari $\Rightarrow f+g$ è pari

f dispari e g dispari $\Rightarrow f+g$ è dispari

f crescente e g crescente $\Rightarrow f \cdot g$ è $\begin{cases} \text{crescente se } f,g>0 \\ \text{decrescente se } f,g<0 \end{cases}$

" " " $\Rightarrow f+g$ " crescente

f decrescente e g decrescente $\Rightarrow f \cdot g$ è dipende

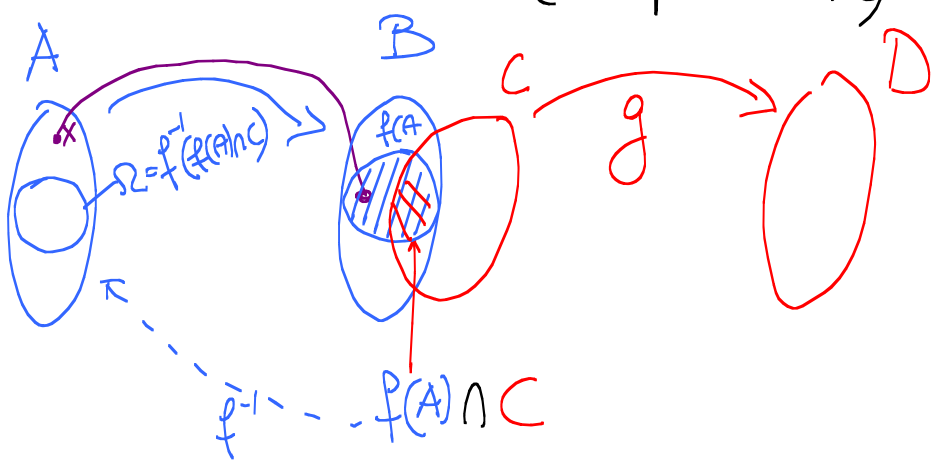
" " " $\Rightarrow f+g$ è decrescente

Def (composizione)

$f: A \to B \quad g: C \to D$ con $\Omega = f^{-1}(f(A) \cap C) \neq \emptyset$

posso definire $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in \Omega$

$g \circ f : \Omega \longrightarrow D$ prodotto di composizione (composizione)



preso $x \in \Omega \Rightarrow f(x) \in f(A) \cap C \Rightarrow g(f(x)) \in D$

$x \in A \setminus \Omega \Rightarrow f(x) \in f(A)$ e $f(x) \notin C \Rightarrow g(f(x))$ NON ESISTE

Esempio

Determinare il dominio di $h(x) = \log\left(\sqrt{10-x^2} - 1\right)$

dim

$f(x) = \sqrt{10-x^2} - 1 \qquad f: A \to \mathbb{R} \qquad A = \{x : 10 - x^2 \geq 0\}$
$= [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$

$$f(A) = \{f(x) : x \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]\} = \{\sqrt{10-x^2} - 1 : x \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]\}$$
$$= \left[\min\left(\sqrt{10-x^2}-1\right); \max\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)\right] = \left[-1, \sqrt{10}-1\right]$$

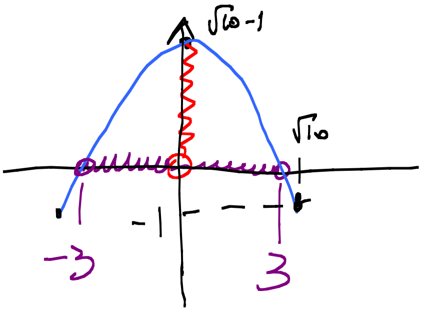
$g = \log y \qquad g: C \to \mathbb{R} \qquad C = \{y : y > 0\}$
$=]0, +\infty[$

$$f(A) \cap C = [-1, \sqrt{10}-1] \cap]0, +\infty[$$
$$=]0, \sqrt{10}-1]$$

$f^{-1}(]0, \sqrt{10}-1)$

$=]-3, 3[$

$f = \sqrt{10-x^2} - 1$



$\Omega =]-3, 3[$

altrimenti

$h = \log_e\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)$ è necessario che $\sqrt{10-x^2}-1>0$

cioè $\sqrt{10-x^2}>1$

cioè

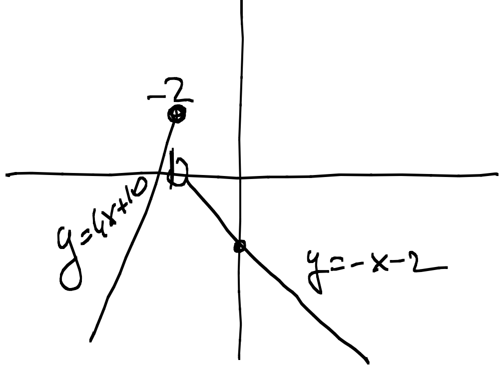
$$\begin{cases}10-x^2\geq 0\\ 10-x^2>1\end{cases} \iff \begin{cases}10\geq x^2\\ 9>x^2\end{cases} \iff x\in\,]-3,3[$$

Esercizio

Date $f(x)=\begin{cases}4x+10 & x\leq -2\\ -2-x & x>-2\end{cases}$ $\quad g(x)=\operatorname{sen}x$

Calcolare l'espressione di $g\circ f$

dim



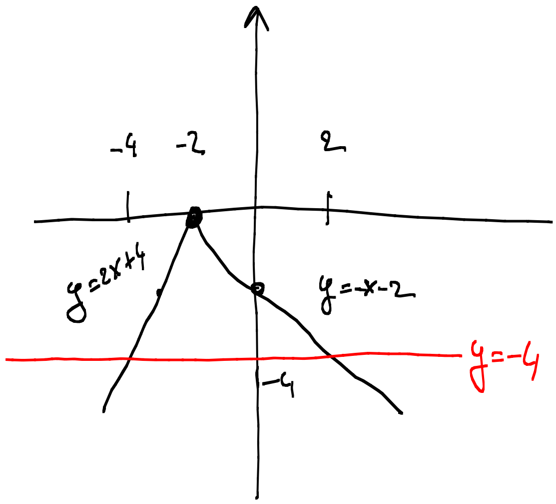
$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}g(4x+10) & x\leq -2\\ g(-2-x) & x>-2\end{cases} = \begin{cases}\operatorname{sen}(4x+10) & x\leq -2\\ \operatorname{sen}(-2-x) & x>-2\end{cases}$$

Esempio

Calcolare $g\circ f$ quando

$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\leq -2\\ -2-x & x>-2\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & x\leq -4\\ \cos x & x>-4\end{cases}$

dim



$$g(f(x))=\begin{cases}\operatorname{sen}(f(x)) & f(x)\leq -4\\ \cos(f(x)) & f(x)>-4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\operatorname{sen}(2x+4) & x\leq -4\\ \cos(2x+4) & -4<x\leq -2\\ \cos(-x-2) & -2<x<2\\ \operatorname{sen}(-x-2) & 2\leq x\end{cases}$$