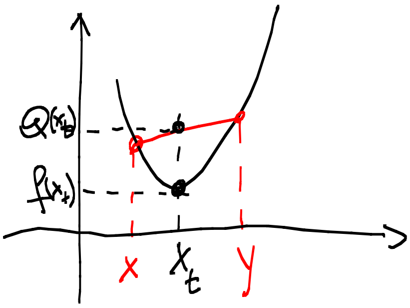
Convessità

Def

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo f è (strettamente) convessa su I se

$\forall x,y \in I$ $x<y$ $f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$ $(<)$ $\forall t \in [0,1]$



$x_t = tx + (1-t)y$ $t \in (0,1)$

$f(x_t) \leq Q(x_t) = t f(x) + (1-t) f(y)$

Quindi "f convessa" se "il segmento che congiunge $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$ sta "sopra" al grafico"

Def

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo si dice "concava su I" se $-f$ è convessa su I

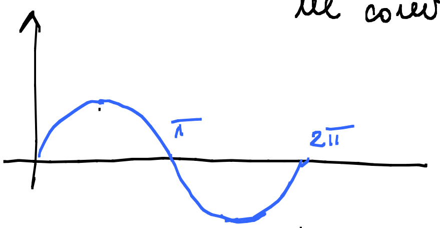
Esempi

1) $f(x) = ax+b$ è convessa e concava $\forall a, b \in \mathbb{R}$

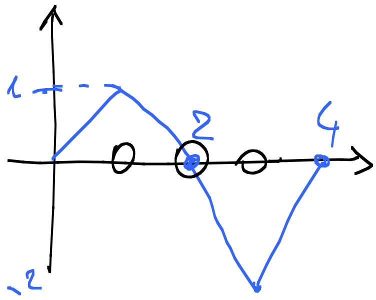
2) $f(x) = \sin x$ è convessa su $[\pi, 2\pi]$ (?) — scritto: è convessa su $[0,\pi]$

è concava su $[\pi, 2\pi]$

né convessa né concava su $[0, 2\pi]$

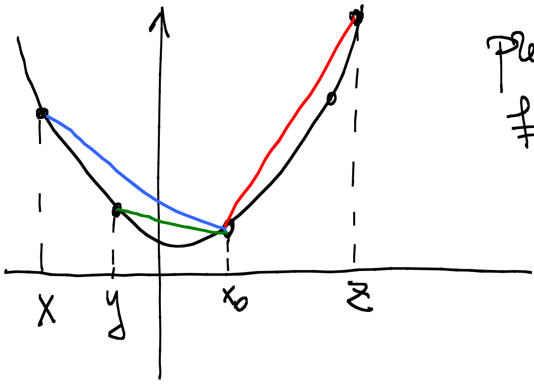


3) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & 0 \leq x < 2 \\ 2|x-3| - 2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$



è concava su $[0,2]$

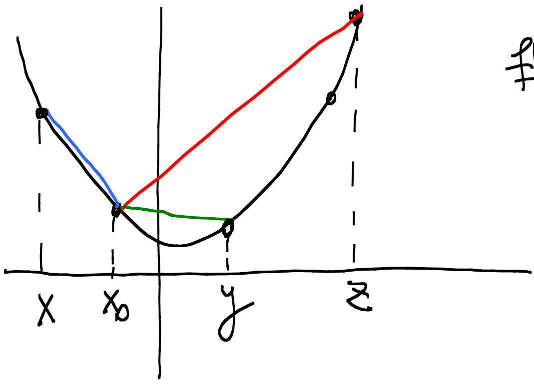
convessa su $[2,4]$



Prendo $x<y<z$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$

$m_x \qquad m_y \qquad m_z$



$$m_x \leq m_y \leq m_z$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \qquad \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$

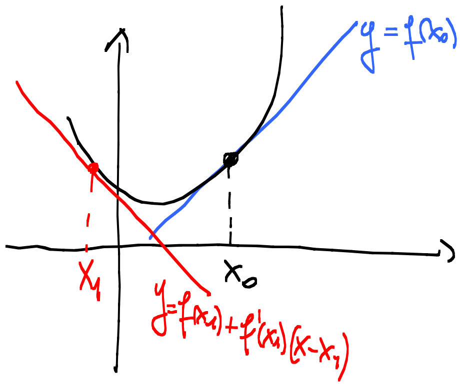
Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo sono equivalenti

1) f convessa su I

2) $R_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente su $I \setminus \{x_0\}$ $\forall x_0 \in I$

dim: (elementare ma omessa)



La retta tg al grafico di una f.ne convessa in $(x_0, f(x_0))$ sta "sotto" il grafico, cioè

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

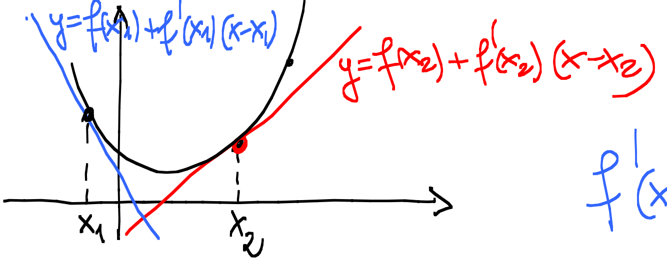
$\forall x \in I$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo f derivabile $\forall x \in I$ sono equiv.

1) f convessa su I

2) $\forall x_0 \in I$ $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



$f'(x_1) \leq f'(x_2)$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo f derivabile $\forall x \in I$ sono equiv

i) f convessa su I (concava)

ii) $f'(x)$ è crescente su I (decrescente)

Teorema (Corollario)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo f derivabile 2 volte $\forall x \in I$ sono eq

Se $f''(x) > 0$ (<0) $\forall x \in I$ allora f convessa su I (concava)

Se f convessa su I (concava) allora $f''(x) \geq 0$ $(\leq)$ $\forall x \in I$

Def $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo $x_0 \in I$ è detto "punto di flesso" se f cambia da convessa a concava (o viceversa) in x_0

ovvero

f convessa su $I \cap \{x < x_0\}$ e concava su $I \cap \{x > x_0\}$ o viceversa

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x-1| & 0 \leq x < 2 \\ 2|x-3|-2 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ha in $x=2$ un punto di flesso

Esempio

$f(x) = x^3$, questa ha in $x=0$ un punto di flesso

Oss: i punti di flesso, per una f.ne f derivabile due volte, si possono cercare tra gli zeri di $f''(x)$, ovvero tra le soluzioni di

$$f''(x)=0$$

però attenzione

se $\bar{x}$ è un flesso allora $f''(\bar{x})=0$

mentre

se $f''(\bar{x})=0$ allora non è detto che $\bar{x}$ sia un flesso

Esempio

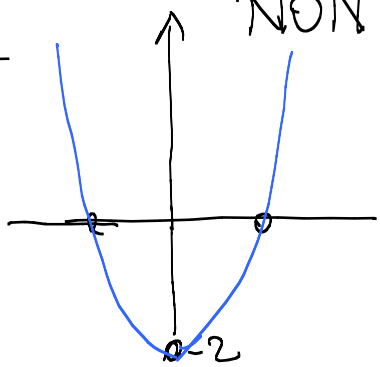
$f(x)=x^4-2$

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2 \Rightarrow \bar{x}=0$ è soluzione di $f''(x)=0$

però NON È un punto di flesso

poiché



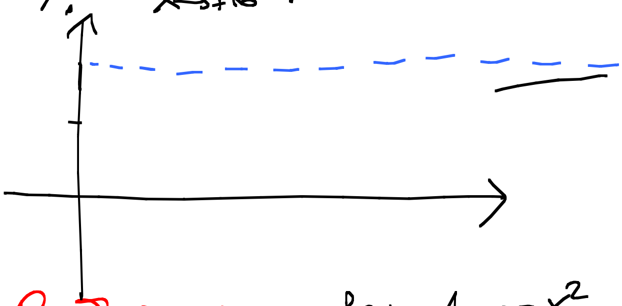
Problema

$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile (e quindi continua) $\forall x>0$,

$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (ha un asintoto orizzontale)

$\overset{??}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$???

Risposta $\boxed{\text{NO}}$



Controesempio $f(x)=\frac{1}{x}\cos x^2$ è derivabile $\forall x>0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos x^2+\frac{1}{x}\cdot\left(-\operatorname{sen}(x^2)\right)\cdot 2x=-\frac{1}{x^2}\cos(x^2)-\operatorname{sen}(x^2)\underset{x\to+\infty}{\not\to}$$

Che cosa manca affinché $f' \to 0$??

Teorema (dell'asintoto)

$f:]a,+\infty[\to \mathbb{R}$, f derivabile $\forall x > a$

esistano

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m}$ mancava prima

Se $\ell \in \mathbb{R}$ allora $m = 0$

dim

$[n, n+1]$ applico Lagrange e quindi $\exists z_n \in (n, n+1)$ t.c.

$$f'(z_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(f(n+1) - f(n)\right) = \lim_{n\to+\infty} f(n+1) - \lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell - \ell = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(n+1) - f(n)\right) = \lim_{n\to+\infty} f'(z_n) = \lim_{z\to+\infty} f'(z) = m \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

Problema

$f:]a,+\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile 2 volte $\forall x > a$, e tale che

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ??$$

RISPOSTA $\boxed{\text{SI}}$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x > M \quad \ell - \varepsilon < f'(x) < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \ell/2 \quad \exists M > 0 : \forall x > M \quad \frac{\ell}{2} < f'(x)$

$\forall y > M \quad \dfrac{f(y) - f(M)}{y - M} = f'(z) \quad M < z < y$ (Teorema Lagrange)

ma $f'(z) \geq \ell/2$

$$\Rightarrow \forall y > \pi \quad \frac{f(y)-f(\pi)}{y-\pi} > \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow \forall y > \pi \quad f(y) > f(\pi) + \frac{\ell}{2}(y-\pi)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty} f(y) \geq \lim_{y\to+\infty} \left[f(\pi) + \frac{\ell}{2}(y-\pi)\right] = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty \qquad ▥$$

Problema

$f:]e,+\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile 2 volte

t.c. $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \ell > 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

RISPOSTA $\boxed{\text{SI}}$

infatti. $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x il risultato precedente

$f' \geq 3 > 0$ per $x \to +\infty$ e quindi per il risultato precedente.

Esercizio

Studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$

dim

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}$ continua $\forall x > 0$

Devo studiare come accade in $x=0$ e $x=+\infty$!

Quindi separo il mio integrale in due

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

1) Studio $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$

$\boxed{x \to 0}$

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \to 0 \quad \left(\text{infatti } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = 1\right)$

ma $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \in \mathbb{R}$ poiché $\frac{1}{2} = \alpha < 1$

$\Longrightarrow \quad \int_0^{1/2} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

(Teorema Confronto Asintotico)

2) Studio $\int_{1/2}^{+\infty} f(x)\,dx$ quando $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} \underbrace{\sim}_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^{3/2}}$$

$\left(\text{infatti } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x^{3/2}}} = 1 \; !!!\right)$

Ma $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{2x^{3/2}}\,dx \in \mathbb{R} \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1$

$\Longrightarrow \quad \int_{1/2}^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

(Teorema Confronto asintotico)

Riassumendo $\int_0^{1/2} f \in \mathbb{R}$ e $\int_{1/2}^{+\infty} f \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$ ////

Esercizio

Sia $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\,dx$

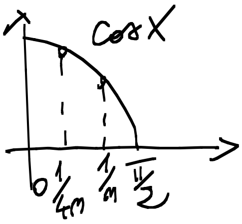
1) Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2) Studiare la convergenza di $\sum_n n^{\alpha}\cdot I_n$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

dim

$I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\,dx$

Non conosco la primitiva di $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} = f(x)$ quindi devo "inscatolare" $f(x)$ tra due f.ni "più semplici"



$$\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} \le \cos\left(\frac{1}{4n}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{VI} \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad\qquad \frac{1}{2}\le\cos x\le 1 \quad \boxed{x\to 0}$$

$$\int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx \le I_n \le \int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\| \qquad \frac{1}{2}\left[\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{n}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} \le I_n \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0$$ (+ il Teorema dei Carabinieri)

Si ha che $\sum_n n^{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ converge

se $\alpha+\frac{1}{2}>1$ sse $\boxed{\alpha>\frac{1}{2}}$

Ma per il Teorema del Confronto $\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{n}}\le I_n\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ che

$\sum_n n^{\alpha} I_n$ converge sse $\alpha>\frac{1}{2}$

Oss: $\displaystyle\int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\,dx = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n}\right)\cdot\frac{\cos z_n}{2\sqrt{z_n}}$ $\quad \frac{1}{4n}\le z_n\le\frac{1}{n}$

$$\underset{I_n}{\parallel} \qquad\qquad \overset{\parallel}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n}}\cdot\frac{\cos z_n}{2\sqrt{z_n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n \doteq \frac{3}{4}\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos z_n}{2\sqrt{z_n}} \le \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{4n}}} =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2\sqrt{n}}{1} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

e quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n \le \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

e poi studio $\displaystyle\sum_n n^{\alpha}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ etc.

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} x\,2^{-x^2}dx = a_n$

Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

dim

$$\int x\cdot 2^{-x^2}dx = \int x\cdot e^{-\ln(2)\cdot x^2}dx =$$

$y=-x^2\ln(2)$

$dy=-2x\ln(2)\,dx$

$\dfrac{dy}{-2\ln(2)} = x\,dx$

$$= \left(\int e^y\,\frac{dy}{-2\ln(2)}\right)_{y=-x^2\ln(2)} = \left(-\frac{1}{2\ln(2)}\cdot e^y + c\right)_{y=-x^2\ln(2)}$$

$$= -\frac{1}{2\ln(2)}\cdot e^{-x^2\ln(2)} + c = \boxed{-\frac{1}{2\ln(2)}\cdot 2^{-x^2} + c} \quad c\in\mathbb{R}$$

$$Q_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} x\, 2^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2\ln(2)} \cdot 2^{-x^2} \right]_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} =$$

$$= -\frac{1}{\ln(4)} \cdot 2^{-2n} + \frac{1}{\ln(4)} \cdot 2^{-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(4)} \left[2^{-n} - 2^{-2n} \right]$$

$$= \frac{1}{\ln(4)} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln(4)} \cdot \left\{ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cancel{-1} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cancel{+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln(4)} \left\{ 2 - \frac{4}{3} \right\} = \frac{2}{3\ln(4)} = \frac{1}{3\ln(2)} = \frac{1}{\ln(8)}$$