Scritto riservato a chi ha l'esonero con voto ≥ 10 in data 11 gennaio 2016, ore 10,30, aula A (in tale data si farà la sola seconda prova scritta)

Def

$f : [a,b[\to \mathbb{R}$ f integrabile secondo Riemann su $[a,\beta]$ $\forall \beta \in [a,b[$

"f integrabile impropriamente su $[a,b[$" se $\exists \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

ℓ "$\int_a^b f(x)dx$"

se $\ell \in \mathbb{R}$ allora l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge (si scrive $\int_a^b f dx < \infty$)

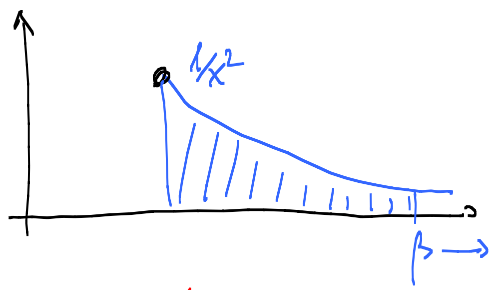
se $\ell = +\infty$ " " $\int_a^b f(x)dx = +\infty$ diverge posit.

$\ell = -\infty$ " " " $-\infty$ " negativamente

se $\nexists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^b f(x)dx$ allora $\nexists$ l'integrale improprio

Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1 = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\beta}$$



Teorema (Condizione Necessaria)

$f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, f continua, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$

Se $\int_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ allora $\ell = 0$

Esempi Fondamentali

$$(\bullet) \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{cases} \text{convergente se } \alpha < 1 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(**) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{convergente} & \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } \alpha \le 1 \end{cases}$

Teorema (se $f \ge 0$ allora $\int_a^b f\,dx$, $b>a$, converge o diverge)

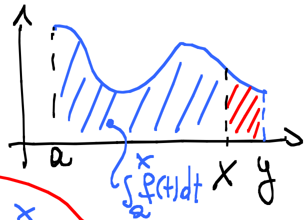
$f : [a,b[\to \mathbb{R}$, f continua $\forall x \in [a,b[$, $f \ge 0$ $\forall x \in [a,b[$
($\le$)

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = +\infty \end{cases}$ (ovvero converge o diverge, però esiste!)

dim

f continua $\forall x \in [a,b[\;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^\beta f(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in [a,b[$

Introduco $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$



$$a \le x < y \;\Rightarrow\; F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt \ge \int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

$f \ge 0 \Rightarrow \int_x^y f \ge 0$!!

Ma allora $F(x)$ è una funzione debolmente crescente

$\Rightarrow \exists \displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x) = \int_a^b f(t)\,dt \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$ ////

Teorema (confronto per integrali impropri)

$f : [a,b[\to \mathbb{R}$, continua $\forall x \in [a,b[$

$\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ " "

1) $|f(x)| \le \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b[$ (dominazione)

2) $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt \in \mathbb{R}$ (ovvero $\int_a^b \varphi\,dt$ convergente!!)

Allora $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ $\left(\int_a^b f^+(t)\,dt \in \mathbb{R} \text{ e } \int_a^b f^-(t)\,dt \in \mathbb{R} \text{ e } \int_a^b |f(t)|\,dt \in \mathbb{R}\right)$

dim

Osservo che $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$

$f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$
$f^-(t) = \max\{-f(t), 0\}$

$f(t) = f^+(t) - f^-(t)$

Per ipotesi f e φ sono continue $\Rightarrow \exists \int_a^\beta f(t)dt$ e $\int_a^\beta \varphi(t)dt \quad \forall \beta \in [a,b[$

" " $\quad 0 \le |f| = f^+(t) + f^-(t) \le \varphi(t) \quad \forall t \in [a,b[$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \le f^+(t) \le \varphi(t) \\ 0 \le f^-(t) \le \varphi(t) \end{matrix} \quad \forall t \in [a,b[$$

x Teorema Confronto

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} \int_a^x f^+(t)dt \le \int_a^x \varphi(t)dt \\ \int_a^x f^-(t)dt \le \int_a^x \varphi(t)dt \end{matrix} \quad \forall x \in [a,b[$$

inoltre f^+, f^-, φ sono positive, e quindi

per ipotesi

$\exists \lim_{x\to b^-} \int_a^x f^+ dt$, $\exists \lim_{x\to b^-} \int_a^x f^- dt$, $\exists \lim_{x\to b^-} \int_a^x \varphi(t)dt \in \mathbb{R}$

passo al limite

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} \lim_{x\to b^-} \int_a^x f^+(t)dt \le \int_a^b \varphi(t)dt \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to b^-} \int_a^x f^-(t)dt \le \int_a^b \varphi(t)dt \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \exists \int_a^b f^+(t)dt \in \mathbb{R} \\ \exists \int_a^b f^-(t)dt \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \exists \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (f^+ - f^-)dt \qquad \exists \int_a^b |f| = \int_a^b (f^+ + f^-)(t)dt \quad \boxed{///}$$

Teorema (Confronto Asintotico)

$f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ tali che

1) $f \ge 0$, $g > 0$ $\forall t \in [a,b[$

2) f, g continue $\forall t \in [a,b[$

3) $f \sim g$ $t \to b^-$ $\left(\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right)$

Allora

$\int_a^b f(t)dt$ converge (diverge) se $\int_a^b g(t)dt$ converge (diverge) cenno dim. l'idea è che $\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell \in \mathbb{R}-\{0\}$ significa

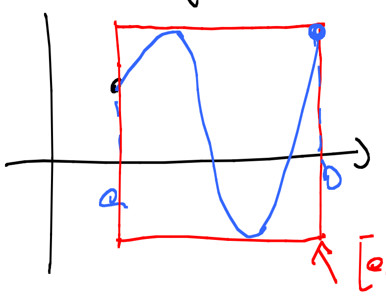
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall t \quad b-\delta<t<b \qquad \ell-\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < \ell+\varepsilon$

$\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ " " " $\underbrace{\frac{\ell}{2}\cdot g(t) < f(t) < \left(\frac{3}{2}\ell\right)\cdot g(t)}$

$f(t)$ è vincolata a comportarsi come $g(t)$ quando $t\to b$

Oss l'integrale (proprio) secondo Riemann è fatto per f.ni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ che sono
- limitate ($f([a,b])$ limitato)
- definite su intervalli chiusi e limitati ($[a,b]$ chiuso limitato)

ovvero grafico $f(x) \subseteq [a,b]\times[\inf f([a,b]), \sup f([a,b])]$



$[a,b]\times[\inf f, \sup f]$

Quando si parla di integrale improprio?

quando non è vero che $(([a,b]$ chiuso e limitato$)$ e $(f$ limitata$))$

non ($[a,b]$ chiuso e limitato) o non (f limitata)

x esempio
- f illimitata su intervallo limitato
- f limitata " " illimitato
- f illimitata " " illimitato etc

Esercizio

Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx$

Nel caso converge, calcolarlo esplicitamente

dim

$$\int_0^{+\infty} x^{-2} \cdot e^{-1/x} dt \qquad f(x) = x^{-2} \cdot e^{-1/x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ può convergere o divergere a } +\infty$$

f è continua $\forall x \in]0, +\infty[$, ovvero

f non è definita in $x = 0$ e $x = +\infty$

Conviene studiare

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{10} f(t) dt + \int_{10}^{+\infty} f(t) dt$$

1) Studio di $\int_0^{10} f(t) dt$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(t) dt = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$

$$\underset{y = -1/x}{=} \lim_{y \to -\infty} \frac{e^y}{1/y^2} = \lim_{y \to -\infty} y^2 \cdot e^y = 0$$

$$\lim_{y \to -\infty} y^2 e^y = \lim_{y \to -\infty} \frac{y^2}{e^{-y}} \overset{H}{=} \lim_{y \to -\infty} \frac{2y}{-e^{-y}} \overset{H}{=} \lim_{y \to -\infty} \frac{2}{+e^{-y}} =$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0^-$$

Ma allora, visto che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, allora

$$\int_0^{10} f(t) dt \in \mathbb{R}$$

2) Studio $\int_{10}^{+\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx \qquad f(x) = x^{-2} e^{-1/x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{e^{-1/\infty}}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Come (con che velocità) tende a zero?

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x > 10 \qquad x > 10 \\ e^{-1/x} \qquad \dfrac{1}{x} \searrow_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{x} \nearrow_{x\to+\infty} 0 \Rightarrow e^{-1/x} \nearrow_{x\to+\infty} 1 = e^0 \\ \left(e^{-1/x}\right)' = e^{-1/x} \cdot (-) \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} > 0 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{f(x) \leq \frac{1}{x^2} = \varphi \ \forall x \geq 10}$

ma $\boxed{\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \in \mathbb{R} \quad \text{in quanto } \alpha = 2 > 1}$

$\boxed{f(x) \text{ e } 1/x^2 \text{ sono continue e } \geq 0}$

(Teorema Confronto Int. Impropri)

$$\Longrightarrow \qquad \int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{10}^{+\infty} t^{-2} e^{-1/t}\,dt \in \mathbb{R}$$

In definitiva

$$\int_0^{10} f(t)\,dt \in \mathbb{R}, \quad \int_{10}^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \ !$$

Calcolo esplicitamente $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-1/t} \cdot t^{-2}\,dt$

$$\int t^{-2} \cdot e^{-1/t}\,dt = \int \frac{1}{t^2} \cdot e^{-1/t}\,dt = \left(\int \cancel{y^2} e^y \cdot \frac{dy}{\cancel{y^2}}\right)_{y=-1/t}$$

$y = -\frac{1}{t}$

$t = -1/y$

$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow dt = \frac{1}{y^2}dy$

$$= \left(e^y + c\right)_{y=-1/t} = e^{-1/t} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \left[e^{-1/t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \lim_{t\to+\infty} e^{-1/t} - \lim_{t\to 0} e^{-1/t} = 1 - 0 = 1$$

$\blacksquare$

Esercizio

Calcolare (se esiste) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$

dim

l'integrale è improprio poiché $f(t)=\dfrac{1}{e^t+e^{-t}}$ è continua $\forall t\geq 0$, ma l'intervallo $[0,+\infty[$ è illimitato

Essendo $f(t)=\dfrac{1}{e^t+e^{-t}}>0$ $\forall t\geq 0$, certamente esiste (finito o $+\infty$) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+e^{-t}}$

$$\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}} \underset{y=e^t}{=} \left(\int \frac{1}{y+\frac{1}{y}}\left(\frac{1}{y}dy\right)\right)_{y=e^t} = \left(\int\frac{dy}{y^2+1}\right)_{y=e^t}$$

$y=e^t$

$t=\ln y$

$\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{1}{y}$ $\quad dt=\dfrac{1}{y}dy$

$$=\left(\operatorname{arctg} y + c\right)_{y=e^t} = \operatorname{arctg}(e^t)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\int_0^{\beta}\frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \left[\operatorname{arctg} e^t\right]_0^{\beta} = \operatorname{arctg} e^{\beta} - \operatorname{arctg} e^0 =$$

$$= \operatorname{arctg} e^{\beta} - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+e^{-t}} = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} e^{\beta}-\frac{\pi}{4}\right] = \operatorname{arctg} e^{\infty}-\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(+\infty)-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Esercizio

Studiare la convergenza (o divergenza) di $\displaystyle\int_0^1 x^{\ln(x)}dx$

dim

$f(x)=x^{\ln(x)}>0$ $\forall x\in(0,1]$ $\qquad f(x)=\left(e^{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}=e^{\ln^2(x)}$

$$\lim_{x\to0^+} x^{\ln(x)} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln^2(x)} = e^{(-\infty)^2} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \,!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{\ln(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\ln^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln x} \cdot e^{\ln^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x)\cdot(\ln(x)+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln^2(x) - \ln(x)}$$

$$= e^{-\infty\cdot(-\infty+1)} =$$

$$= e^{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow x^{\ln(x)}$ "va a $+\infty$" PIÙ VELOCEMENTE di $\frac{1}{x}$ ($x \to 0$)

ma $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \Rightarrow \int_0^1 x^{\ln(x)} dx = +\infty$ $\blacksquare$