Integrali Impropri

Esercizio

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha}$$

dim

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\beta x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \left[\log x\right]_{x=1}^{x=\beta} & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^{x=\beta} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \log \beta & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ $\quad \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \to +\infty} \log(\beta) = +\infty$ "spartiacque"

$\alpha < 1$ $\quad \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta \to +\infty} \left[\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = +\infty$ (poiché $1-\alpha > 0$!!)

$\alpha > 1$ $\quad \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta \to +\infty} \left[\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha - 1}$ (poiché $1-\alpha < 0$)

$\blacksquare$

Riassumendo

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} \overset{"}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \overset{"}{=} \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} \in \mathbb{R} & \alpha > 1 \end{cases}$$

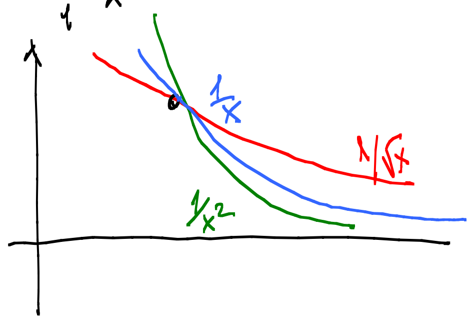
Oss: la serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$

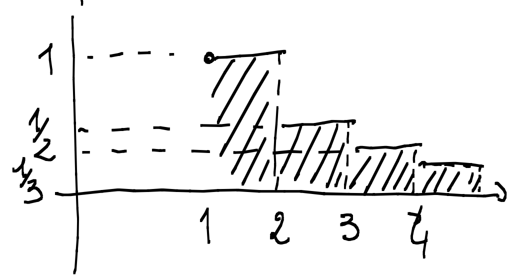
converge se $\alpha > 1$

diverge se $\alpha \leq 1$

ovvero

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ e $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ convergono (divergono) per gli stessi $\alpha$



La somma di una serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ non è altro che l'integrale da 1 a $+\infty$ della f.ne

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{n^\alpha} \quad : n \leq x < n+1 \right.$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Esercizio

Calcolare $\lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

dim

$$\int_\beta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\log x\right]_{x=\beta}^{x=1} & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=\beta}^{x=1} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} -\log \beta & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\beta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \quad (1-\alpha > 0) \\ \lim_{\beta \to 0^+} -\log \beta = +\infty & \alpha = 1 \\ \lim_{\beta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = +\infty & \alpha > 1 \quad (1-\alpha < 0) \end{cases}$$

$\square$

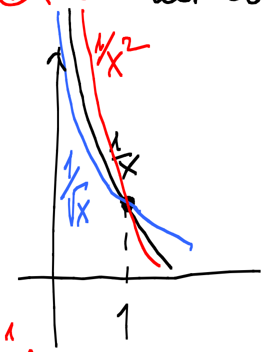
Riassumendo

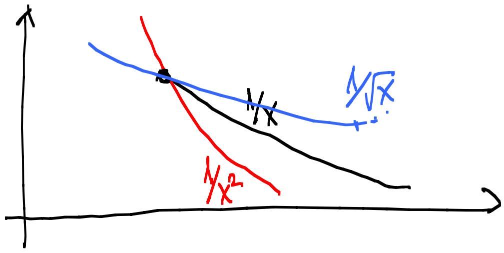
$$\lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \text{"} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{"} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Per studiare un integrale improprio

- conoscere l'andamento di $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$
- conoscere i teoremi del confronto e del confronto asintotico

**Oss** nel caso di $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, la rappresentazione grafica è



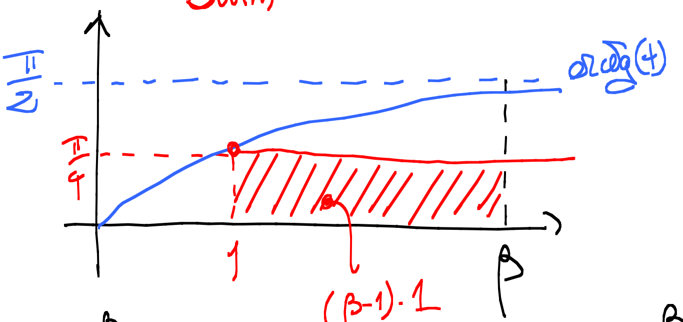

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty$ $\qquad$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$

**Esercizio**

Studiare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(t)\,dt = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \operatorname{arctg}(t)\,dt$

**dim**




$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\beta} \operatorname{arctg}(t)\,dt = \int_0^{1} \operatorname{arctg}(t)\,dt + \int_1^{\beta} \operatorname{arctg}(t)\,dt \geq \int_0^{1} \operatorname{arctg}(t)\,dt + (\beta-1) \\ \text{vale questa disuguaglianza } \forall \beta > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \operatorname{arctg}(t)\,dt \geq \underbrace{\int_0^{1} \operatorname{arctg}(t)\,dt}_{\in \mathbb{R}} + \lim_{\beta \to +\infty} (\beta - 1) = +\infty$$

perché $\operatorname{arctg}(t)$ è continua (quindi integrabile) su $[0,1]$

$$\Rightarrow \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \operatorname{arctg}(t)\,dt = \text{“}\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(t)\,dt\text{”} = +\infty$$

∎

Oss: nelle serie numeriche $\sum_n a_n$, avevamo una "condizione necessaria" che diceva

"Se $\sum_n a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$"

e quindi

"Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ allora $\sum_n a_n$ <u>non</u> converge"

formuliamo questo risultato per gli integrali su domini illimitati.

**Teorema** (Condizione necessaria di convergenza per integrali impropri)

Sia $f: [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$, continua, $f \geq 0$

Se $\boxed{\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$ e $\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

allora $\ell = 0$

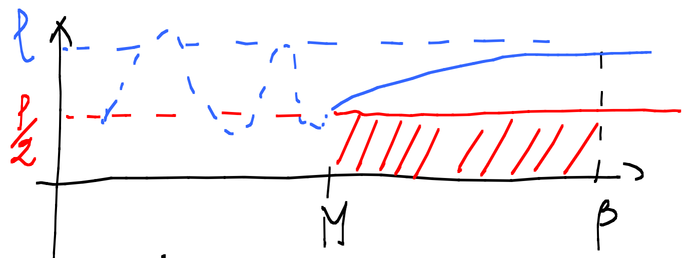
dim

Per assurdo $\ell \neq 0 \Rightarrow \ell > 0$. Per definizione di limite

$\forall \varepsilon>0\ \exists M>0\ \forall x>M \quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$\Downarrow \varepsilon = \ell/2$

$\varepsilon = \ell/2 \quad \exists M>0 : \forall x > M \quad \frac{\ell}{2} = \ell - \frac{\ell}{2} < f(x)$




dunque $\forall \beta > M$ si ha (per il Teorema confronto)

$$\int_0^\beta f(x)\,dx = \int_0^M f(x)\,dx + \int_M^\beta f(x)\,dx \geq \int_0^M f(x)\,dx + \int_M^\beta \frac{\ell}{2}\,dx$$

$$= \int_0^M f(x)\,dx + \frac{\ell}{2}\cdot(\beta - M) \qquad \text{vero } \forall \beta > M$$

Passo al limite

$$\Longrightarrow \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta f(x)\,dx \geq \underbrace{\int_0^M f(x)\,dx}_{\substack{\in\mathbb{R} \text{ poiché} \\ f \text{ continua su} \\ [0,M]}} + \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\ell}{2}(\beta - M) = +\infty$$

Ma questo è ASSURDO $\left(\lim_{\beta\to+\infty}\int_b^\beta f(x)dx \in \mathbb{R}\right.$ per ipotesi$\left.\right)$

$\Rightarrow \ell = 0$

VIII

## Def (Integrale Improprio - o generalizzato)

$f: [a,b[ \to \mathbb{R}$ integrabile $\forall \beta \in (a,b[$ su $[a,\beta]$ (cioè $\int_a^\beta f(x)dx \in \mathbb{R}$ $\forall \beta \in (a,b[$)

diciamo che

"$f$ integrabile impropriamente su $[a,b[$" se $\exists \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx \in \mathbb{R}$ in tal caso l'integrale "converge"

$\int_a^b f(x)dx =$ ---- $= +\infty \, (-\infty)$ " " " " "diverge a $+\infty$ $(-\infty)$"

Quando $\nexists \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx$ diciamo che $\nexists$ l'integrale improprio $\int_a^b f(x)dx$

## Esempi

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile impropriamente su $[1,+\infty[$

e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1 \in \mathbb{R}$, cioè converge

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ è integrabile impropriamente su $[1,+\infty[$

e $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = +\infty$ cioè diverge a $+\infty$

3) $f(x) = \operatorname{sen} x$ non è integrabile impropriamente su $[0,+\infty[$

infatti, $\int_0^\beta \operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=\beta} = -\cos\beta + 1 \underset{x\to+\infty}{\overset{\text{non ha limite}}{\not\longrightarrow}}$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile impropriamente su $]0,1]$ e

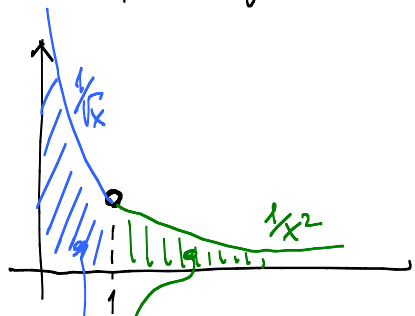
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}\right]_{x=\alpha}^{x=1} = 2 \in \mathbb{R}$$

e dunque l'integrale converge

**Problema** $f: ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ t.c., $\sup f(]0,+\infty[) = +\infty$, $f>0 \ \forall x>0$, $f$ continua

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \quad ???$$

**NO**: presa infatti la seguente funzione $f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0<x\leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1<x \end{cases}$




questa regione è illimitata ma ha area finita

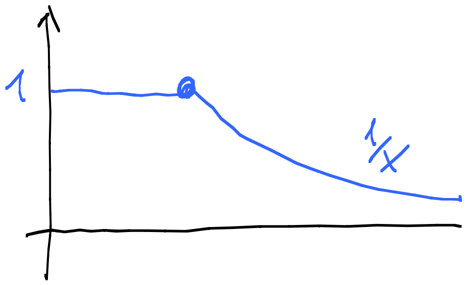
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \in \mathbb{R}$$

$$\sup f(]0,+\infty[) \geq \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

**Problema** $f: [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, limitata, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f$ continua

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad ?$$

**NO**: prendo la funzione $f = \begin{cases} 1 & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{x} & 1\leq x \end{cases}$




$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 1\cdot 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = 1+\infty = +\infty$$

**Oss**: Come accadeva per le serie numeriche in cui

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Longrightarrow \sum_n a_n \text{ converge !!}$$

anche per gli integrali impropri

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \not\Longrightarrow \int^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Teorema

$f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ : $\exists \int_a^\beta f(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in [a,b[$

se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b[$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste $\begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$