

Def $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata $\leftarrow$ intervallo chiuso e limitato $\leftarrow$ f. su limitato

si dice "integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ " se

$$\sup \{ \rho(f, A) : A \text{ add. di } [a,b] \} = \inf \{ S(f, B) : B \text{ add. di } [a,b] \} = S(f)$$

e in tal caso si scrive

$$\int_a^b f(x) dx = \rho(f) = S(f)$$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitato se $\exists [a,b]$ intervallo, $a, b \in \mathbb{R}$,

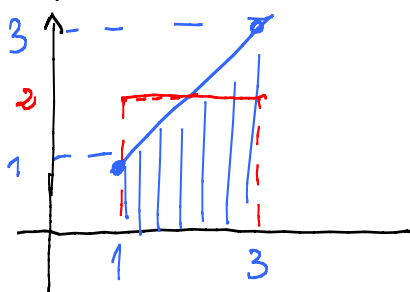
$$\text{t.c. } A \subseteq [a,b]$$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata se $f(A)$ è limitato

Def $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, diciamo "media integrale di f su $[a,b]$ " il numero

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Es prendere $f(x) = x$ su $[1,3]$ si ha

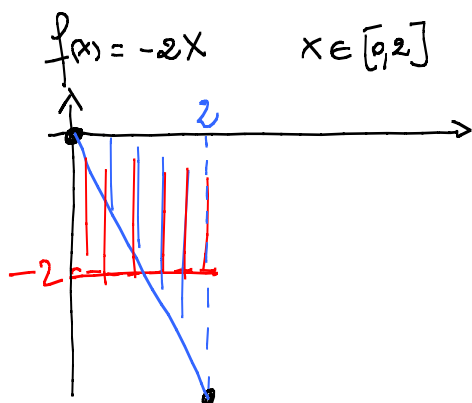


$$\int_1^3 x dx = \text{area del rettangolo} = 4$$

e quindi

$$\frac{1}{3-1} \int_1^3 x dx = \frac{4}{2} = 2$$

la media di f su $[a,b]$ è l'altezza di un rettangolo avente come base $[a,b]$ che ha area (col segno) uguale all'integrale di f da " a " a " b "



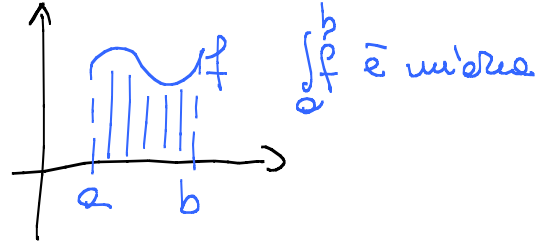
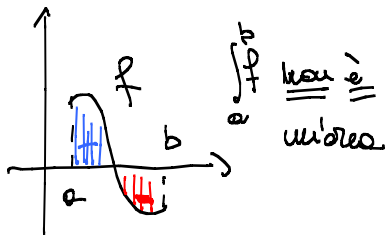
$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (-2x) dx = -4$$

e dunque

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 (-2x) dx = \frac{-4}{2} = -2$$

Oss: l'integrale di $f(x)$ in $[a,b]$ NON È un'area 2
 infatti es. $\int_{-1}^1 (-3) dx = -6 < 0$

l'integrale di $f(x)$ in $[a,b]$ è un'area, l'area del sottografico, ove $f \geq 0$



Teorema (della Media Integrale)

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

i) f è integrabile $\Rightarrow \inf f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup f([a,b])$

ii) f continua $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists z \in [a,b] : f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
 dim

i) Si ha $\inf f([a,b]) \leq f(x) \leq \sup f([a,b]) \quad \forall x \in [a,b]$

$\left. \begin{array}{l} \inf f([a,b]) \\ \sup f([a,b]) \\ f(x) \end{array} \right\} \text{ sono integrabili in } [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \inf f([a,b]) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \sup f([a,b]) dx$$

(Teorema confronto)

$$\Rightarrow (b-a) \inf f([a,b]) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup f([a,b])$$

$$\Rightarrow \inf f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup f([a,b])$$

ii) f continua in $[a,b] \Rightarrow \exists \min f([a,b]) \quad \max f([a,b])$
 quindi, dal punto i) si ottiene

$$\min f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max f([a,b])$$

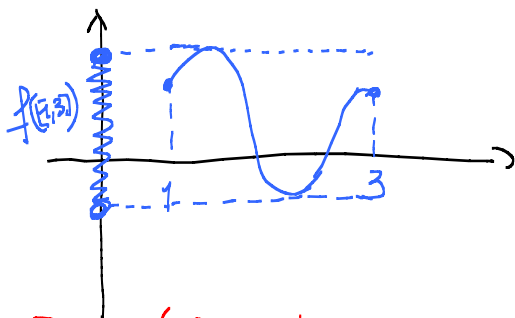
Teorema Valori Intermedi:

$\Rightarrow f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $\min f([a,b])$ e $\max f([a,b])$

$$\Rightarrow \exists z \in [a,b] : f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow f([a, b]) = [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$



Def (integrale su intervalli orientati)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$, con $b > a$,
 allora definiamo

$$\int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} - \int_a^b f(x) dx$$

Si verifica che TUTTI i teoremi enunciati e provati,
 continuano a valere, con una sola "attenzione"

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

Inoltre, introducendo gli integrali su intervalli
 orientati, si ha che

$$\int_0^{100} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx + \int_{10}^{100} f(x) dx = \int_0^{100} f(x) dx - \int_{100}^{10} f(x) dx$$

perché f è integrabile su $[0, 10]$, $[0, 100]$, $[10, 100]$

Teorema (Fondamentale del Calcolo Integrale I)

Sì $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$

Preso $a \in I$, definiamo

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad x \in I$$

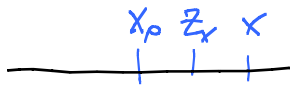
Allora $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$, ovvero F è una primitiva di f
dici

Devo provare che $\forall x_0 \in I \quad F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$
Def di derivata Tesi

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \\ \text{applico il} & \quad \text{teorema di} & \quad \text{spettro} & \quad \Rightarrow \frac{1}{x - x_0} \left(\cancel{\int_a^{x_0} f(t) dt} + \int_{x_0}^x f(t) dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t) dt} \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(z_x) \quad \text{con } z_x \in I, |z_x - x_0| \leq |x - x_0| \\ & \quad \uparrow \\ & \quad \text{Teorema della} \\ & \quad \text{medio integrale} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(z_x) = \lim_{z_x \rightarrow x_0} f(z_x) = f(x_0)$$

f continua in x_0



□

Teorema (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE II) 5

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua $\forall x \in I$

fissato $a \in I$ $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

Sia $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f

Allora i) $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$

ii) $\forall \alpha, \beta \in I \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

dim

i) $F(x)$ è una primitiva $\forall$ per il Teorema Fond. Calcolo I

$G(x)$ " " " dif per ipotesi

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$ (dimostrato nella lezione di venerdì)

$$\text{ii) } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \stackrel{\text{Teorema spezzamento}}{=} \int_{\alpha}^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{\beta} f(t) dt \stackrel{\text{Integrali orientati}}{=} - \int_{x_0}^{\alpha} f(t) dt + \int_{x_0}^{\beta} f(t) dt$$

$$\stackrel{\text{per definizione dif}}{=} -F(\alpha) + F(\beta) \stackrel{\text{per il punto i) di questo Teorema}}{=} -(G(\alpha) + c) + (G(\beta) + c)$$

$$= G(\beta) - G(\alpha)$$

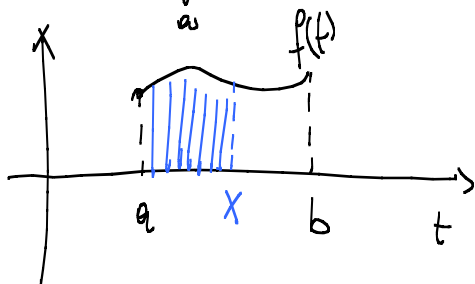
□

Oss: Il Teor. Fond. Calcolo Integrale I ci dice che

$\forall f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo f continua $\forall x \in I$

ha almeno una primitiva (e quindi ∞) data da

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



L'area del rettografico tra a e x (col segno) è una primitiva di f

Qss: la primitiva di $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo f continua non
 esiste $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 zero

non è detto che si riesca a trovare di esprimere
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ in termini di f. in elementi
 ovvero

se $f(t) = \sin t$ allora $F(x) = \int_a^x \sin t dt = -\cos(x) + \cos(a)$

mentre
 se $f(t) = e^{t^2}$ allora $F(x) = \int_a^x e^{t^2} dt$? non conosco la
 primitiva in forma
 esplicita

Esercizio
 Calcolare $\int_0^3 x^3 dx$, $\int_0^\pi \sin x dx$, $\int_e^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx$

dim
 $f(x) = x^3$ ha come primitiva $\frac{x^4}{4} \Rightarrow \int_0^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=3} =$
 $= \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4}$

$f(x) = \sin x$ ha come primitiva $-\cos x \Rightarrow \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{x=0}^{x=\pi}$
 $= -\cos(\pi) + \cos(0)$
 $= -(-1) + 1 = 2$

$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ ha come integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \left(\int \frac{1}{\cancel{e^y} \cdot y} \cdot \cancel{e^y} dy \right)_{y=\ln(x)} = \left(\ln|y| + c \right)_{y=\ln(x)}$$

$y = \ln(x)$
 $x = e^y$
 $dx = e^y dy$

$$e^2 = \ln(\ln(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_e^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)) \right] = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \quad \square$$

Esercizio

Calcolare $F'(x)$ dove $F(x) = \int_x^1 t e^{t^2} dt$

dim

modo brutto per risolvere l'esercizio

$$\int t e^{t^2} dt = \left(\int \sqrt{y} \cdot e^y \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} \right)_{y=t^2} = \left(\frac{e^y}{2} + C \right)_{y=t^2} = \frac{e^{t^2}}{2} + C$$

$$\int_x^1 t e^{t^2} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2} \right]_{t=x}^{t=1} = \frac{e}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} = F(x)$$

$$F'(x) = -\frac{2x}{2} e^{x^2} = -x e^{x^2}$$

modo più semplice

$$F(x) = \int_x^1 t e^{t^2} dt = \int_1^x f(t) dt \quad f(t) = -t e^{t^2} \text{ continua}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) = -x e^{x^2}$$

Teorema fond.
calcolo I



Esercizio

Calcolare $G'(x)$ dove $G(x) = \int_2^{x^2} \ln(1 + \cos t) dt$

dim

$$G'(x) = \ln(1 + \cos(x^2)) : \text{vero o falso ??}$$

NO

$$x \xrightarrow{\varphi} x^2 \xrightarrow{F} \int_2^{x^2} \ln(1 + \cos t) dt$$

$$\varphi(x) = x^2 \quad F(y) = \int_2^y \ln(1 + \cos t) dt \quad G(x) = F(\varphi(x))$$

$$\varphi'(x) = 2x \quad F'(y) \stackrel{\text{T.F.C.I.}}{\downarrow} \ln(1 + \cos y)$$

$$G'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \ln(1 + \cos(\varphi(x))) \cdot 2x$$

8

$$= \ln(1 + \cos(x^2)) \cdot 2x$$

□□

Teorema (Cambio di variabili negli integrali definiti)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo, f continua $\forall x \in I$

$\varphi: J \rightarrow I$ J intervallo, φ " $\forall x \in J$

$\varphi: J \rightarrow I$ φ' "

$\varphi' \neq 0 \forall x \in J$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Esempio
Calcolare
di cui $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{y} & \varphi(x) &= \ln(x) \\ \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx &= \int_e^{e^2} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(e)}^{\varphi(e^2)} f(y) dy = \int_{\ln(e)}^{\ln(e^2)} \frac{dy}{y} \\ &= \left[\ln|y| \right]_{y=\ln(e)}^{y=\ln(e^2)} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

□□□

Esercizio
Calcolare
di cui $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot 2x dx$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot 2x dx$$

$$f(y) = \sqrt{1-y} \quad \varphi(x) = x^2$$

$$\sqrt{1-x^2} \cdot 2x = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot 2x dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \sqrt{1-y} dy = \int_0^1 (1-y)^{1/2} dy =$$

$$= \left[-\frac{(1-y)^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{2}{3} (1-1)^{3/2} + \frac{2}{3} (1-0)^{3/2} = \frac{2}{3}$$

alternative

$$\int 2x \cdot \sqrt{1-x^2} dx = \left(\int \cancel{2\sqrt{1-y}} \cdot \sqrt{y} \cdot -\frac{dy}{\cancel{2\sqrt{1-y}}} \right)_{y=1-x^2}$$

$$y = 1-x^2$$

$$x^2 = 1-y \quad x = \sqrt{1-y}$$

$$dx = -\frac{dy}{2\sqrt{1-y}}$$

$$= \left(-\frac{y^{3/2}}{3/2} + c \right)_{y=(1-x^2)} = -\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 2x(\sqrt{1-x^2}) dx = \left[-\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} (1-0^2)^{3/2} = \frac{2}{3}$$



Anticipazione prossima lezione:

10

calcolare i seguenti limiti

$$\int_1^{\alpha} t^2 dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} ?$$

$$\int_1^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} ?$$

$$\int_1^{\alpha} \frac{dt}{t} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} ?$$

$$\int_1^{\alpha} \frac{dt}{t^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} ?$$

$$\int_1^{\beta} t^2 dt \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty}$$

$$\int_1^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t}} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty}$$

$$\int_1^{\beta} \frac{dt}{t} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty}$$

$$\int_1^{\beta} \frac{dt}{t^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty}$$