**Teorema** (CNS di integrabilità)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata sono equivalenti

i) $f$ è integrabile su $[a,b]$ $\left(s(f)=S(f)\right)$

ii) $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni di $[a,b]$ : $S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon$

* iii) " $\exists\, \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione di $[a,b]$ : $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$

Per decidere rapidamente se una f.ne sia o no integrabile devo caratterizzare classi di funzioni integrabili

**Teorema** (le f.ni monotone sono integrabili)

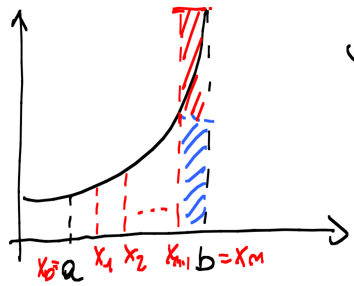
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ , $f$ debolmente crescente (decrescente)

allora $f$ è integrabile

dim.

Suppongo $f$ sia deb. crescente $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Tesi $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$




$$\mathcal{C}_m=\left\{a=x_0;\ x_1=x_0+\frac{b-a}{m};\ x_2=x_1+\frac{b-a}{m};\ \dots;\ x_{m-1}=x_{m-2}+\frac{b-a}{m};\ x_m=b\right\}$$

$$=\left\{x_0+k\cdot\frac{b-a}{m} : k=0,1,\dots,m\right\}$$

Questa è una suddivisione con tutti gli intervallini $[x_k,x_{k+1}]$ di lunghezza $\frac{b-a}{m}$

Osserviamo che $\inf f([x_k,x_{k+1}])=f(x_k)$

$\sup f([x_k,x_{k+1}])=f(x_{k+1})$

$$S(f,\mathcal{C}_m)-s(f,\mathcal{C}_m)=\sum_{k=0}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\left[\sup f([x_k,x_{k+1}])-\inf f([x_k,x_{k+1}])\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{b-a}{m}\cdot\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]$$

$$=\frac{b-a}{m}\cdot\left\{\left(\cancel{f(x_1)}-f(a)\right)+\left(\cancel{f(x_2)}-\cancel{f(x_1)}\right)+\dots+\left(f(b)-\cancel{f(x_{m-1})}\right)\right\}$$

$$=\boxed{\frac{b-a}{m}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)}$$ può essere resa arbitrariamente piccola prendendo $m$ grande

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n=n(\varepsilon) : \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon \quad \exists \mathcal{C}_{n(\varepsilon)} : S(f,\mathcal{C}_{n(\varepsilon)})-s(f,\mathcal{C}_{n(\varepsilon)})<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \mathcal{C}_\varepsilon \text{ suddiv. t.c. } S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$$

Oss: Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotona, non so ancora come calcolare $\int_a^b f\,dx$, però so che esiste

Teorema (Le f.ni continue sono integrabili)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $f$ è integrabile su $[a,b]$

dim: per la dimos. serve la nozione di uniforme continuità e il teorema di Heine Cantor

Per il momento la dimostrazione non si fa

verrà fatta – forse – più avanti

Oss: Abbiamo provato (parzialmente) che

$$\{\text{f.ni continue su } I\} \subseteq \{\text{f.ni integrabili su } I\} \qquad I=[a,b]$$

$$\{\text{f.ni monotone su } I\} \subseteq \{\text{f.ni integrabili su } I\}$$

# Ricerca Primitive f.ni razionali

**Teorema** (che non dimostriamo)

$f=\frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P$ polinomio grado $p\geq 0$ $Q$ polinomio grado $q \geq 0$

$$\Rightarrow \exists \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = F(x)+c \quad c \in \mathbb{R}$$

e $F$ è esprimibile in termini di f.ni elementari

Noi considereremo f.ni razionali $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con
grado $P(x) \geq 0$
$2 \geq$ grado $Q(x) \geq 0$

## 1° Caso: $Q(x)=ax+b$, cioè $Q(x)$ di grado 1

**Esercizio**

Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+1}{x-2}dx$

dim

grado $P(x)=3 >$ grado $Q(x)=1$. Dobbiamo fare la divisione $P(x)/Q(x)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & & +1 & x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2-x-2 \\ \cline{1-4}
// & -x^2 & & +1 & \\
 & -x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & // & -2x & +1 & \\
 & & -2x & +4 & \\ \cline{3-4}
 & & // & -3 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2+1=(x^2-x-2)(x-2)-3$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-3x^2+1}{x-2}dx = \int (x^2-x-2)dx - \int \frac{3}{x-2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x - 3\left(\int \frac{dy}{y}\right)_{y=x-2}$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x - 3\left(\ln|y| + c\right)_{y=x-2}$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x - 3\ln|x-2| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

2° Caso $Q(x) = ax^2 + bx + c$ con radici reali $\neq$

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

dim

$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$ 2 radici reali $\neq$

grado $P(x)$ = grado $Q(x)$, quindi devo dividere $P/Q$ ma in questo caso molto semplice

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int \frac{x^2+\overbrace{4x+3}}{x^2+4x+3}\,dx - \int \frac{\overbrace{4x+3}}{x^2+4x+3}\,dx$$

$$= \int 1\cdot dx - \int \frac{4x+3}{x^2+4x+3}\,dx = x - \int \frac{4x+3}{x^2+4x+3}\,dx$$

Adesso $\begin{cases} \text{grado}(4x+3) = 1 < 2 = \text{grado}(x^2+4x+3) \\ x^2+4x+3=0 \text{ ha 2 radici reali } \neq \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{4x+3}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx+3B}{(x+3)\ (x+1)}$$

$$\Rightarrow 4x+3 = (A+B)x + A+3B \Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ A+3B=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2B = 1 \\ '' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = 4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{4x+3}{(x+3)(x+1)}\,dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x+3)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{9}{2}\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$c \in \mathbb{R}$

e dunque $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+3)(x+1)}\,dx = x - \frac{9}{2}\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c \quad c\in\mathbb{R}$

Regoletta: $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ con $Q(x) = (x-a)(x-b)$ $a,b\in\mathbb{R}$

allora $\exists A, B$ t.c. $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \forall x \neq a, b$

3° caso : $Q(x)=(x-a)^2$ ovvero radici reali =

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{x^2-4x+4}\,dx$

divisione

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ grado $(P(x))=3>$ grado $(Q(x))=2 \Rightarrow$ devo dividere

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad -x \;+1 & x^2-4x+4 \\ \hline x^3-4x^2+4x & x+4 \\ \hline // \;\; 4x^2-5x+1 & \\ \quad\;\; 4x^2-16x+16 & \\ \hline \quad // \;\; 11x-15 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-x+1=(x^2-4x+4)(x+4)+11x-15$

$$\int \frac{x^3-x+1}{x^2-4x+4}\,dx=\int (x+4)\,dx+\int \frac{11x-15}{(x-2)^2}\,dx$$

Adesso $\begin{cases} \text{grado}(11x-15)=1<\text{grado}((x-2)^2)=2 \\ (x-2)^2=0 \text{ ha 2 radici } = \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{11x-15}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{Ax-2A+B}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow 11x-15=Ax-2A+B \Rightarrow \begin{cases} A=11 \\ B-2A=-15 \end{cases} \begin{cases} A=11 \\ B=7 \end{cases}$

perciò

$$\int \frac{x^3-x+1}{(x-2)^2}\,dx=\int (x+4)\,dx+11\int\frac{dx}{(x-2)}+7\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+11\ln|x-2|-\frac{7}{(x-2)}+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

////

Oss: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)^2}\underset{y=(x-2)}{=}\left(\int\frac{dy}{y^2}\right)_{y=x-2}=\left(-\frac{1}{y}+c\right)_{y=(x-2)}=-\frac{1}{x-2}+c \quad c\in\mathbb{R}$

Regoletta: grado $(P(x))<$ grado $(Q(x))$ $Q(x)=(x-a)^2$ $a\in\mathbb{R}$

Allora $\exists A,B\in\mathbb{R}$ : $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$

4° caso $Q(x) = ax^2+bx+c$ con 2 radici complesse coniugate

**Esercizio**

Calcolare $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}\,dx$

dim

$x^2+2x+3 = (x^2+2x+1)+2 = (x+1)^2+2$ e quindi $Q(x)=0$ non ha radici reali

essendo $Q$ a coeff reali, le sue radici complesse sono tra loro coniugate

grado $(P(x)) = 1 < 2 =$ grado $(Q(x))$

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{2x+2-2-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$2x+2 = \frac{d}{dx}(x^2+2x+3)$

$$= \left(\int \frac{dy}{y}\right)_{y=x^2+2x+3} - 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+2}$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{2}\left(\int \frac{\sqrt{2}\,dy}{1+y^2}\right)_{y=\frac{x+2}{\sqrt{2}}}$$

$y = \frac{x+2}{\sqrt{2}}$

$dy = \frac{dx}{\sqrt{2}}$

$$= \ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c \quad c\in\mathbb{R}$$

Verifica $\left(\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c\right)' =$

$$= \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+\frac{(x+2)^2}{2}} = \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{3}{(x+2)^2+2} \quad \checkmark$$

**Regoletta** grado $(P)<$ grado $(Q)$ $\quad P(x) = cx+d \quad Q(x) = (x+a)^2+b^2 = x^2+2ax+a^2+b^2$ con $a\in\mathbb{R}$ $b>0$

(ovvero $Q(x)=0$ ha 2 radici complesse coniugate)

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)} = \int\frac{cx+d}{x^2+2ax+a^2+b^2}\,dx = \int\frac{cx+2ac}{x^2+2ax+a^2+b^2} - \int\frac{2ac-d}{(x+a)^2+b^2} = c\ln(x^2+2ax+a^2+b^2)$$

$$-\frac{(2ac-d)}{b^2}\cdot\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+a}{b}\right)^2}$$ e si termina con la sostituzione $y = \frac{x+a}{b}$

# Sostituzioni Razionalizzanti

ovvero sostituzioni che mi portano a f.ni razionali

$$\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

## Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx$

dim

1° modo $\boxed{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}}$ $\quad \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}\left(2\frac{x}{2}\right) = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\operatorname{Tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}$

$$\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \left(1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = (1+t^2)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt}$$

$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}dx \underset{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{=} \left(\int \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}\right)_{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\int\frac{4t\,dt}{(1+t^2)\cdot(1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2})}\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left(\int\frac{2t}{1+t^2}dt\right)_{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \left(\ln(1+t^2)+c\right)_{t=\operatorname{Tg}\frac{x}{2}} = \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

II modo $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}dx \underset{y=1+\cos x}{=} \left(\int\frac{-dy}{y}\right)_{y=1+\cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}x$$

$$\boxed{-dy = \operatorname{sen}x\,dx}$$

$$= \left(-\ln|y|+c\right)_{y=1+\cos x} = -\ln|1+\cos x| + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Le primitive sono $\neq$? perché?

$$\boxed{-\ln|1+\cos x|} = \ln\left|\frac{1}{1+\cos x}\right| = \ln\left|\frac{1}{1+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\right| = \ln\left|\frac{1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}+1-\operatorname{Tg}^2\frac{x}{2}}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{1+\mathrm{Tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right| = \boxed{\ln\left|1+\mathrm{Tg}^2\frac{x}{2}\right| - \underbrace{\ln 2}_{\text{cost.}}}$$

perchè differiscono per una costante : "$-\ln(2)$"

$t=\sqrt{x}$

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

dim

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \left(\int \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}\,(t^2+1)}\right)_{t=\sqrt{x}} = \left(2\int\frac{dt}{1+t^2}\right)_{t=\sqrt{x}}$$

$x=t^2$
$dx=2t\,dt$

$$= \left(2\,\mathrm{arctg}\,t + c\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + c \quad c\in\mathbb{R}$$

# INTEGRALE DEFINITO

**Teorema** (no dim)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabili

1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$ (linearità)

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot k\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall k\in\mathbb{R}$ (omogeneità)

**Teorema** (no dim)

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabili, $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

**Teorema** (no dim)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile

allora $f^+=\max\{f,0\}$ $f^-=\max\{-f,0\}$ $|f|=f^++f^-$ sono integrabili e si ha $\displaystyle\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$

come dire

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b (f^+ - f^-)\,dx \le \int_a^b (f^+ + f^-)\,dx = \boxed{\int_a^b |f|\,dx}$$

$$\ge$$

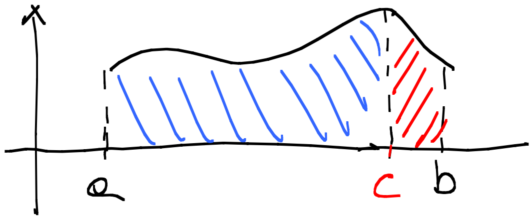
$$\int_a^b -f^+ - f^- = \boxed{-\int_a^b |f|}$$

**Teorema (spezzamento)**

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $c \in \,]a,b[$

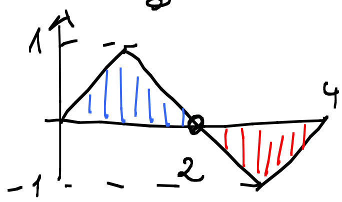
$\Longrightarrow$ $f$ è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$




**Pb** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile $\int_a^b f = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f \equiv 0$ su $[a,b]$?

**NO**: prese $f(x)$




$$\int_0^4 f\,dx = 0$$

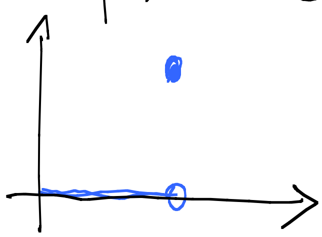
ma $f \neq 0$

**Pb** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $f \geq 0$, $\int_a^b f\,dx = 0$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f \equiv 0$ $\forall x \in [a,b]$ ??

**NO** infatti $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ non è identicamente nulla,

$f \geq 0$ $\forall x \in [0,2]$ e $\int_0^2 f\,dx = 0$



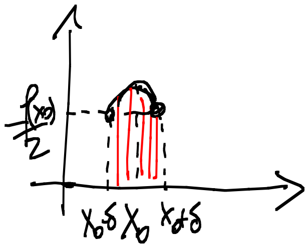
**Pb** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0\ \forall x\in[a,b]$, $f$ continua in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \implies f=0 \ ?$$

**Sì**

Assurdo $f(x_0)>0$ $\quad x_0\in\,]a,b[$

$\Rightarrow$ (Perm. segno) $\exists\,\delta>0 : f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$ $\quad\forall x\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[$




Prendo $A=\{a,\ x_0-\delta,\ x_0+\delta,\ b\}$

$$s(f,A) = (x_0-\delta-a)\inf f([a,x_0-\delta]) + 2\delta\cdot\inf f([x_0-\delta,x_0+\delta])$$
$$+\,(b-x_0-\delta)\inf f([x_0+\delta,b])$$
$$\geq 2\delta\cdot\inf f([x_0-\delta,x_0+\delta]) > 2\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2} = f(x_0)\,\delta>0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq s(f,A)>0 \quad \text{Assurdo}$$