Primitive di f $\equiv F$ significa $F' = f$ $\forall x \in I$

Integrale indefinito $\equiv \int f(x)dx = F(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$

Tabella delle primitive

$\operatorname{sen} x \longmapsto -\cos x + c$

$\cos x \longmapsto \operatorname{sen} x + c$

$e^x \longmapsto e^x + c$

$x^n \longrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\forall n \neq -1$

$\frac{1}{x} \longrightarrow \log|x| + c$

Regola di integrazione per decomposizione in somma

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Regola di integrazione per parti $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$

" " " " sostituzione

$$\int (g \circ f)(x) \cdot f'(x)\,dx = G(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Oss $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$

però

$$\int \frac{df}{dx}\,dx = f(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE DEFINITO (Secondo Riemann)

L'origine sta nel problema delle aree (che è molto più antico del calcolo della retta tangente)

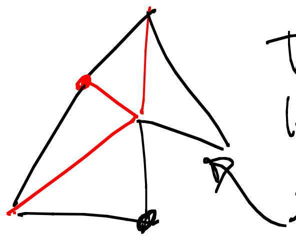
$$C \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{area}(C) \in [0, +\infty[$$

Vogliamo costruire una teoria che rispetti le seguenti condizioni

i) area (rettangolo) = base × altezza

ii) $A \subseteq B \implies \text{area}(A) \leq \text{area}(B)$

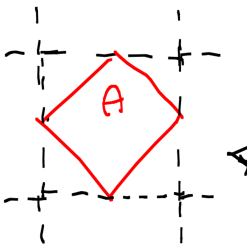
iii) R è una rototraslazione $\implies \text{area}(R(A)) = \text{area}(A)$



Triangolarizzando si possono calcolare le aree di poligoni come quello di figura

Se però abbiamo C che ha frontiera non lineare a tratti, non so come fare

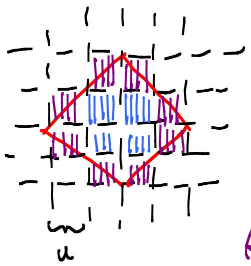
L'idea di Riemann è quella di approssimare, ovvero



se suddivido il piano in quadretti di lato 2

allora scopro che
dentro A ho $\emptyset$ quadretti
$A \subseteq 1$ solo quadretto

Area esterna $(A) = 4 \times 4 = 16$ Area interna $= 0$



Area interna = 4

Area esterna = 12

Area esterna − Area interna = 8

L'idea è la seguente: più è piccolo il lato dei quadratini, minore è la differenza tra (quadratini interni) e (quadratini che contengono la figura)

Def (suddivisione)

Dato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, diciamo "suddivisione di $[a,b]$" che la indichiamo con $\mathcal{A}$ una collezione di punti di $[a,b]$

$$\mathcal{A} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Esempio

$[a,b] = [0,4]$

$$\mathcal{A} = \{0,4\}$$
$$\mathcal{B} = \{0,2,4\}$$
$$\mathcal{C} = \{0,1,2,4\}$$
$$\mathcal{D} = \{0,\tfrac{1}{2},3,4\}$$

sono suddivisioni di $[0,4]$

Def (somme per eccesso e per difetto)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e sia $\mathcal{A}$ una suddivisione di $[a,b]$

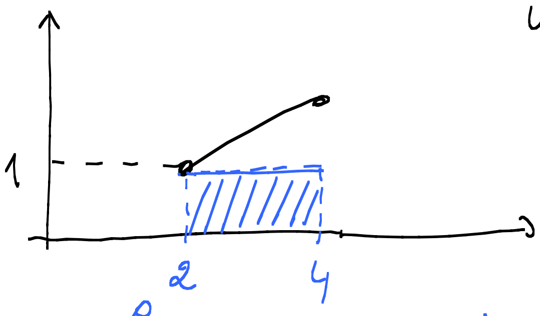
Somma per difetto (relativa a f e $\mathcal{A}$) $\quad s(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}])$

Somma per eccesso (" " ") $\quad S(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}])$

Esempio

$f(x) = x/2 \qquad [2,4]$

$\mathcal{A} = \{2,4\}$

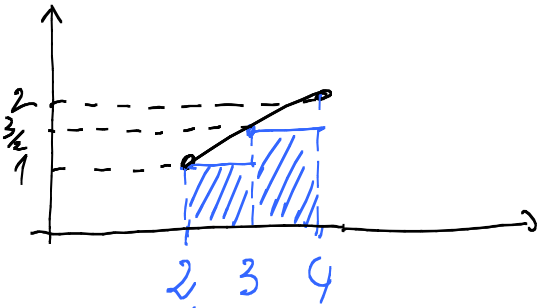


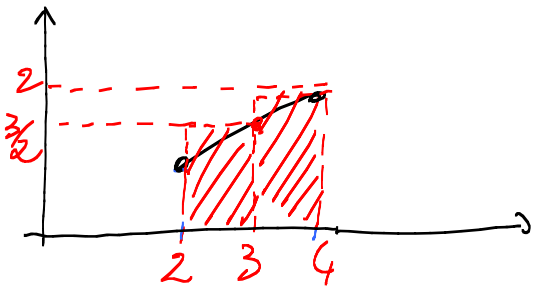
$$s(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{0} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf f([x_k, x_{k+1}])$$
$$= (4-2) \cdot \inf f([2,4]) =$$
$$= 2 \cdot 1 = 2$$

$$S(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{0} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup f([x_k, x_{k+1}])$$
$$= (4-2) \sup f([2,4])$$
$$= 2 \cdot 2 = 4$$

$$S(f,\mathcal{A}) - s(f,\mathcal{A}) = 4 - 2 = 2$$

Considero ora $\mathcal{P}=\{2,3,4\}$





$$s(f,\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\inf f([x_k,x_{k+1}])$$
$$=(3-2)\inf f([2,3])+(4-3)\inf f([3,4])$$
$$=1\cdot 1+1\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

$$S(f,\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$
$$=(3-2)\sup f([2,3])+(4-3)\sup f([3,4])$$
$$=1\cdot\frac{3}{2}+1\cdot 2$$
$$=\frac{7}{2}$$

$$S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$$

Considero $\mathcal{Q}=\{2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4\}$

$$s(f,\mathcal{Q})=\sum_{k=0}^{3}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$
$$=\left(\frac{5}{2}-2\right)\cdot 1+\left(3-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{7}{2}-3\right)\cdot\frac{3}{2}+\left(4-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{7}{4}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{21}{8}$$

$$S(f,\mathcal{Q})=\sum_{k=0}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$
$$=\left(\frac{5}{2}-2\right)\cdot\frac{5}{4}+\left(3-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{7}{2}-3\right)\cdot\frac{7}{4}+\left(4-\frac{7}{2}\right)\cdot 2$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+1=\frac{24}{8}$$

$$S(f,\mathcal{Q})-s(f,\mathcal{Q})=\frac{24}{8}-\frac{21}{8}=\frac{3}{8}$$

Teorema (proprietà di $s(f,A)$ ed $S(f,A)$)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e siano A, B suddivisioni di $[a,b]$

i) $s(f,A) \le S(f,A)$ $\forall A$ suddivisione di $[a,b]$

ii) $A\subseteq B \implies$ $s(f,A)\le s(f,B)$
$\qquad\qquad\qquad S(f,A)\ge S(f,B)$

iii) $s(f,A)\le S(f,B)$ $\forall A, B$ suddivisioni

dim

i) è ovvio

$$s(f,A)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$
$$\wedge|$$
$$S(f,A)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$

ii) omesso

iii) devo provare $\forall A, B$ $\quad s(f,A)\le S(f,B)$

prendo $C=A\cup B$

$$s(f,A)\underset{\substack{A\subseteq C\\ \text{per la ii)}}}{\le} s(f,C)\underset{\text{per la i)}}{\le} S(f,C)\underset{\substack{B\subseteq C\\ \text{per la ii)}}}{\le} S(f,B)$$

$\blacksquare$

Def $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata è detta "Riemann integrabile su $[a,b]$ se

$$s(f)=\sup\{s(f,A): A \text{ suddivisione}\}=\inf\{S(f,A): A \text{ suddivisione}\}$$

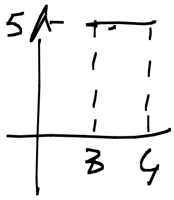
$s(f)$: integrale inferiore $\qquad$ $S(f)$: integrale superiore

e si scrive $s(f)=S(f)=\int_a^b f(x)\,dx$

Esempio

$f(x)=5$ su $[3,4]$ è integrabile e si ha

$$\int_3^4 f(x)\,dx=(4-3)\cdot 5=5$$



Facoltativo: Dimostrazione di $A \subseteq B \Rightarrow s(f,A) \leq s(f,B)$ G
$S(f,A) \geq S(f,B)$

Prese $A = \{x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ $\quad B = A \cup \{\bar{x}\}$ con $x_0 < \bar{x} < x_1$

$$s(f,B) = (\bar{x}-x_0)\inf f([x_0,\bar{x}]) + (x_1-\bar{x})\inf f([\bar{x},x_1]) + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$\geq (\bar{x}-x_0)\inf f([x_0,x_1]) + (x_1-\bar{x})\inf f([x_0,x_1]) + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}]) = s(f,A) \Rightarrow s(f,B) \geq s(f,A)$$

analogamente

$$S(f,B) = (\bar{x}-x_0)\sup f([x_0,\bar{x}]) + (x_1-\bar{x})\sup f([\bar{x},x_1]) + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$

$$\leq (\bar{x}-x_0)\sup f([x_0,x_1]) + (x_1-\bar{x})\sup f([x_0,x_1]) + \sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}]) = S(f,A) \Rightarrow S(f,B) \leq S(f,A)$$

La dimostrazione è identica se $\bar{x} \in (x_1,x_2)$ (oppure $\bar{x} \in (x_2,x_3)$ etc)
Nel caso in cui B ed A differiscono per più di un punto ($x$es $B = A \cup \{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$) allora le tesi sole a maggior ragione (si applica 2 volte il procedimento)

Fine della dimostrazione facoltativa

Controesempio (f.ne non integrabile)

$f: [0,2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,2] \cap \mathbb{Q} \quad \text{nei punti razionali} \\ 0 & x \in [0,2] \setminus \mathbb{Q} \quad \text{nei p.ti irrazionali} \end{cases}$

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall k \;\; \exists q_k \in \mathbb{Q} : x_k < q_k < x_{k+1}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ " " " $\mathbb{R} \Rightarrow \forall k \;\; \exists t_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x_k < t_k < x_{k+1}$

$\Downarrow$ $\quad \mathcal{A} = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 2\}$

$$s(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \overset{0}{\overbrace{f(t_k)}} = 0$$

$$S(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot f(q_k) \overset{=1}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

$$= (\cancel{x_1} - 0) + (x_2 - \cancel{x_1}) + \dots + (2 - x_{n-1})$$

$$= 2$$

$\Downarrow$

$\forall \mathcal{A}$ suddivisione $\quad S(f,\mathcal{A}) - s(f,\mathcal{A}) = 2$

$\Downarrow$

$$S(f) - s(f) = 2 - 0 = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ non è integrabile} \blacksquare$$

Teorema (CNS di integrabilità)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata sono equivalenti

i) f è integrabile su $[a,b]$ $\quad (s(f) = S(f))$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni di $[a,b]$: $S(f,\mathcal{A}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{B}_\varepsilon) < \varepsilon$

* iii) " $\quad \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione di $[a,b]$: $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

dim

1) $\Rightarrow$ 2) $\quad$ ipotesi $\quad s(f) = \int_a^b f = S(f)$

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ sudd.}\} = \int_a^b f\,dx \iff \begin{cases} s(f,\mathcal{B}) \le \int_a^b f\,dx \;\; \forall \mathcal{B} \text{ suddiv.} \\ \boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathcal{B}_\varepsilon : \int_a^b f\,dx - \varepsilon < s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)} \end{cases}$$

$$S(f) = \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ sudd.}\} = \int_a^b f\,dx \iff \begin{cases} \int_a^b f\,dx \le S(f,\mathcal{A}) \;\; \forall \mathcal{A} \text{ sudd.} \\ \boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \mathcal{A}_\varepsilon \text{ sudd. } S(f,\mathcal{A}_\varepsilon) < \int_a^b f + \varepsilon} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ suddd. $S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \left(\int_a^b f + \varepsilon\right) + \left(\varepsilon - \int_a^b f\, dx\right)$ 8

$= 2\varepsilon$

ovvero la ii)

ii) $\Rightarrow$ iii) Per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon\ :\ S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ presa $C_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon :\ S(f, C_\varepsilon) - s(f, C_\varepsilon) \leq S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

ovvero la iii)

iii) $\Rightarrow$ ii) Per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon$ sudd. $S(f, C_\varepsilon) - s(f, C_\varepsilon) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ prese $A_\varepsilon = B_\varepsilon = C_\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ suddd : $S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ i) per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon\ :\ S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

$S(f) \leq S(f, A_\varepsilon)\quad \forall A_\varepsilon$ $\qquad \left(S(f) = \inf\{S(f, A) : A\}\right)$

$s(f) \geq s(f, B_\varepsilon)\quad \forall B_\varepsilon$ $\qquad \left(s(f) = \sup\{s(f, B) : B\}\right)$

$\Rightarrow\quad S(f) - s(f) \leq S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon\ :\ S(f) - s(f) \leq S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

$\Rightarrow\ S(f) = s(f)$ $\qquad$ ▥