Esercizio

Sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=1$ di $f(x)=e^x$

dim

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Nel ns. caso $f(x)=e^x$ $\quad x_0=1 \quad n=3$

$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=e^x$

$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=e$

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = e+e\cdot(x-1)+\frac{e}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3$$

Lo sviluppo cercato è

$$f(x)=P_3(x)+o\left((x-1)^3\right) \qquad x\to 1$$

Esercizio

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 relativo a $f=\operatorname{sen}x$ centrato in $x_0=\frac{\pi}{2}$

dim

$$P_4(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(\frac{\pi}{2})}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k$$

$$\boxed{f(x)=\operatorname{sen}x \quad x_0=\frac{\pi}{2} \quad n=4}$$

$f=\operatorname{sen}x$	$f'=\cos x$	$f''=-\operatorname{sen}x$	$f'''=-\cos x$	$f^{(IV)}(x)=\operatorname{sen}x$
$f(\frac{\pi}{2})=1$	$f'(\frac{\pi}{2})=0$	$f''(\frac{\pi}{2})=-1$	$f'''(\frac{\pi}{2})=0$	$f^{(IV)}(\frac{\pi}{2})=1$

$$P_4(x)=1-\frac{1}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

Oss: la formula di Taylor con il resto di Peano mi dice che, sotto opportune ipotesi (f derivabile $n-1$ volte $\forall x\in]a,b[$ e n volte in x_0) si ha

$$f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right) \qquad x\to x_0$$

dove

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Osserviamo che $o((x-x_0)^n)$ mi dice soltanto che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

però non dà altrimenti come m'è fatto $f(x)-P_n(x)$

ovvero potrei avere

$$f(x)-P_n(x) = 10^{-12}\cdot(x-x_0)^{n+1} = o((x-x_0)^n) \quad x\to x_0$$

oppure

$$f(x)-P_n(x) = 10^{7}\cdot(x-x_0)^{n+3} = o((x-x_0)^n) \quad x\to x_0$$

Osserviamo che

$$\frac{10^{-12}(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \qquad \frac{10^{7}(x-x_0)^{n+3}}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

ma, quando $x \neq x_0$, $10^{-12}(x-x_0)^{n+1}$ ha un comportamento ben $\neq$ da $10^7(x-x_0)^{n+3}$: infatti

se $x = x_0+1$
$$10^7(x_0+1-x_0)^{n+3} = 10^7$$
$$10^{-12}(x_0+1-x_0)^{n+1} = 10^{-12}$$

Sarebbe interessante poter "stimare" $f(x)-P_n(x)$

A tal fine mi serve una formula + esplicita del resto $f(x)-P_n(x)$ che è data x esempio da

Teorema (formula di Taylor con il resto di Lagrange)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

Suppongo f derivabile $\forall x \in]a,b[$ $(n+1)$ volte

Posto $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ si ha

Allora $\exists z \in]a,b[$ $|z-x_0|<|x-x_0|$: $f(x)-P_n(x) = \boxed{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$

dim (cenni) Resto di Lagrange

Si utilizza il Teorema di Cauchy $(n+1)$ volte

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{[f(x)-P_n(x)] - \overbrace{[f(x_0)-P_n(x_0)]}^{=0}}{(x-x_0)^{n+1} - \underbrace{(x_0-x_0)^{n+1}}_{=0}} = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\theta_{n+1}(x)-\theta_{n+1}(x_0)} \qquad \phi = f-P_n \quad \theta_{n+1} = (x-x_0)^{n+1}$$

Applico th Cauchy all'intervallo $[x, x_0]$, e dunque esiste $z_1 \in [x, x_0]$:

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi'(z_1)}{\theta'_{n+1}(z_1)} = \frac{f'(z_1)-P'_n(z_1)}{(n+1)(z_1-x_0)^n} = \frac{[f'(z_1)-P'_n(z_1)]-[f'(x_0)-P'_n(x_0)]}{n+1\,[(z_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n]}$$

Applico Cauchy all'intervallo $[z_1, x_0]$ e trovo $\exists z_2 \in [z_1, x_0]$:

$$\frac{f''(z_2)-P''_n(z_2)}{(n+1)n\cdot(z_2-x_0)^{n-1}} = \underset{(n+1)\text{ volte Cauchy}}{-----} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})-P_n^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}$$ chiamando $z = z_{n+1}$ e abbiamo la tesi $////$

Esempio (stima del resto con formula di Lagrange)

Data $f(x) = \operatorname{sen} x$, dato $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ polinomio ordine 3 relativo a $\operatorname{sen} x$ centrato in $x_0 = 0$

Che errore commetto sostituendo a $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ $P_3(\frac{1}{2})$?

dim

Voglio sapere $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2} - P_3(\frac{1}{2})\right| = \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\right|$

$$= \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2} - \frac{23}{48}\right|$$

quanto è grande (voglio scoprire che $\bar{e} \le K$, e determinare K)

Lagrange

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2} - P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(V)}(z)}{5!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^5$$

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2} - \frac{23}{48}\right| \le \frac{|f^{(V)}(z)|}{120}\cdot\frac{1}{32} =$$

$$= \frac{|\cos z|}{120\cdot 32} \le \frac{\sup\left|\cos\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\right|}{120\cdot 32}$$

$0 < z < \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{32\cdot 120} = \frac{1}{3840}$$

$f = \operatorname{sen} x$
$f' = \cos x$
$f'' = -\operatorname{sen} x$
$f''' = -\cos x$
$f^{(IV)} = \operatorname{sen} x$
$f^{(V)} = \cos x$

$////$

Sono particolarmente utili gli sviluppi delle f.ni elementari centrati in $\boxed{x_0 = 0}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x + o(x) && x \to 0 \\
&= x + o(x^2) && x \to 0 \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) && x \to 0 \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) && x \to 0 \\
&\dots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) && x \to 0
\end{aligned}$$

f.ne dispari e compaiono potenze dispari

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 + o(x) && x \to 0 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) && x \to 0 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) && x \to 0 \\
&\dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) && x \to 0
\end{aligned}$$

è una f.ne pari, e quindi compaiono potenze pari

$$\operatorname{tg}(x) = x + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + o(1) && x \to 0 \\
&= 1 + x + o(x) && x \to 0 \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) && x \to 0 \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) && x \to 0 \\
&\dots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) && x \to 0
\end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare lo sviluppo di $f = \operatorname{arctg}(x)$ in $x=0$ di ordine 3

dim

$f = \operatorname{arctg}(x) \qquad f(0) = 0$

$f' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$

$f'' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad f''(0) = 0$

$$f''' = \frac{-2(1+x^2)^{\cancel{2}\,1} + 2x\cdot 2\cdot \cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8x^2 - 2x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \qquad f'''(0) = -2$$

$$P_3(x) = 1\cdot x - \frac{2}{3!}\cdot x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^5) \qquad x \to 0$$

$\boxed{///}$

In generale, in $x=0$

$$\operatorname{arctg}(x) = x + o(x^2) \qquad x \to 0$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad x \to 0$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \qquad x \to 0$$

Compaiono potenze dispari perché la f.ne è dispari

...

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad x \to 0$$

Esercizio

Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0=0$ di $f(x)=\ln(1+x)$

dim

$f=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$

$f'=\dfrac{1}{1+x} \qquad f'(0)=1=(1-1)!$

$f''=-\dfrac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0)=-1=-(2-1)!$

$f'''=\dfrac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0)=2=(3-1)!$

$f^{(iv)}=-\dfrac{6}{(1+x)^4} \qquad f^{(iv)}(0)=-6=-(4-1)!$

$$P_4(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{6}{4!}x^4$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

$$f(x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=o(x^4) \qquad x\to 0$$

In generale, in $x_0=0$ si ha

$$\ln(1+x)=x+o(x) \qquad x\to 0$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \qquad x\to 0$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad x\to 0$$

$$\ldots$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$x\to 0$

Esercizio

Calcolare lo sviluppo di ordine 4 della f.ne
$f(x)=(1+x)^\alpha$ $\quad x>-1$ e $\alpha\in\mathbb{R}$
centrato in $x_0=0$

dim

per casa: calcolare $f', f'', f''', f^{(IV)}$ in $x_0=0$ e determinare $P_4(x)$

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$$

$$\alpha\ln(1+x) = \alpha x - \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{\alpha x^4}{4} + o(x^4) \qquad x\to 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + o(y^4) \qquad y\to 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\alpha\ln(1+x)} = 1 + \left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha\frac{x^4}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha\frac{x^4}{4}\right]^2$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2}\cdots\right]^3 + \frac{1}{24}\left[\alpha x + \cdots\right]^4 +$$

$$+ o\left(\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha\frac{x^4}{4}\right]^4 + o(x^4)\right)$$

$$= 1 + \alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\left[\alpha^2x^2 - \alpha^2x^3 + \alpha^2\frac{x^4}{4}\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha^3x^3 - \frac{3}{2}\alpha^3x^4\right] + \frac{1}{24}\alpha^4x^4 + o\left(\alpha^4x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= 1 + \alpha x + x^2\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right) + x^3\left[\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right]$$

$$+ x^4\left\{-\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha^4}{24}\right\} + o(x^4)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$$

$$+ o(x^4)$$

$\square$

$\boxed{x_0=0}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + o(1) \qquad x \to 0$$
$$= 1 + \alpha x + o(x) \qquad x \to 0$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$
$$- - -$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$\boxed{\alpha=-1}$

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{6}x^3$$
$$+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{24}x^4 + o(x^4)$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + (-x)^4 + o(x^4)$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Esercizio (Per casa)

Data $f_\alpha(x) = \ln\left(e^{\alpha x} - \operatorname{sen}(\alpha x)\right) + \cos(\alpha x) - 1$

calcolare $P_4(x)$, il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = 0$

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x) - 9x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{P_n(x) - 9x^3 + o(x^4)}{x^4}$$

Esercizio (Per casa)

Data la funzione $f = \arctan\left(\ln(1+x)\right) - \ln\left(1+\arctan x\right)$

Calcolare ordine e pp di $f(x)$ per $x \to 0$

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4 + x^\alpha}$

scrivendo $f(x) = (\text{parte principale}) + o(x^\alpha)$ per $x \to 0$

Def Data $f(x)$ funzione infinitesima per $x \to x_0$, diciamo che f ha ordine α per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Dunque $f(x) = k\,(x-x_0)^\alpha + o\left((x-x_0)^\alpha\right) \qquad x \to x_0$

e diciamo

parte principale di f per $x \to x_0 \equiv k\cdot(x-x_0)^\alpha$

Esempio

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2) \qquad x \to 0$

e dunque $\operatorname{sen} x$ ha ordine 1 e pp. x quando $x \to 0$

$e^x - 1 - \cancel{x}\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad x \to 0$

$\text{ordine}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = 3 \qquad pp\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{6}$