Teorema (Cauchy)

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f,g continue $\forall x \in [a,b]$

f,g derivabili $\forall x \in]a,b[$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora $\exists z \in]a,b[$ t.c.

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Oss: presa $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$
derivabile $\forall x \in]a,b[$

$g(x) = x \rightarrow \begin{cases} \text{continua } \forall x \in [a,b] \\ \text{derivabile } \forall x \in]a,b[\\ g'(x) = 1 \neq 0 \ \forall x \in]a,b[\end{cases}$

questa non si usa i potesi

$\Rightarrow$ (Teorema Cauchy) $\exists z \in]a,b[$: $\dfrac{f'(z)}{g'(z)} = f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ovvero il Teorema di Lagrange è un corollario del Teorema di Cauchy (così come Rolle era corollario del Teorema di Lagrange)

Teorema (di L'Hôpital) $\left(\frac{0}{0}\right)$

$f,g :]a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$

ii) f,g derivabili $\forall x \in]a,b[$

iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

iv) $\exists \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\exists \lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

dim

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$$

Dunque abbiamo $\tilde{f}, \tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$\tilde{f}, \tilde{g}$ continue su $[a,b]$

derivabili su $]a,b[$

$\tilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$\Rightarrow$ (Vale Teorema Cauchy) $\exists z_x \in]a,b[\; : \; \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \dfrac{\tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(b) - \tilde{g}(a)}$

$$= \frac{f(b)}{g(b)}$$

$\forall t \in]a,b[$

Dunque abbiamo $\tilde{f}, \tilde{g} : [a,t] \to \mathbb{R}$ t.c.

$\tilde{f}, \tilde{g}$ continue su $[a,t]$

derivabili su $]a,t[$

$\tilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,t[$

$\Rightarrow$ (Vale Teorema Cauchy) $\underbrace{\exists z_t \in]a,t[}$ $: \; \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \dfrac{\tilde{f}(t) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(t) - \tilde{g}(a)}$

$$= \frac{f(t)}{g(t)}$$

Allora

$$\lim_{t \to a^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to a^-} \frac{f'(z_t)}{g'(z_t)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{z \to a^-} \frac{f'(z)}{g'(z)} \underset{\uparrow}{=} \ell$$

$a < z_t < t$ per ipotesi

Allora $\exists \lim_{t \to a^-} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \ell$ $\blacksquare$

Controesempio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Se mi venisse il desiderio di applicare l'Hospital

Troverei

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

Come mai non funziona ??? $f=\cos x$ e $g=x$ sono derivabili, $\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{f'}{g'}$, $g'\neq 0$: cosa manca?

NON è una forma indeterminata $0/0$!!!!

Esempio

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5}$ $\quad (0/0)$

dim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{5x^4} \quad 0/0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{20x^3} \quad 0/0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{60x^2} \quad 0/0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{120x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{120} = \frac{1}{120} = \boxed{\frac{1}{5!}}$$

Esempio (in cui converrà procedere altrimenti)

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(1-\cos x) - 1}{x^2}$ $\quad 0/0$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x - \cos(1-\cos x)\cdot(\operatorname{sen} x)}{2x}$$

in questo caso non mi ha aiutato applicare l'Hôpital. Dovrò ricorrere ad altro

Teorema (di L'Hôpital) $\left(\infty/\infty\right)$

$f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$

i) f, g derivabili $\forall x \in]a,b[$

ii) $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \exists \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$ ($\pm\infty$ non mi interessa)

iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

iv) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Polinomi di Taylor

Def (di polinomio di Taylor)

Data $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, il polinomio $P_n(x)$ si dice "polinomio di Taylor di ordine n, relativo ad f, centrato in x_0" se

$$f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Esempio

Data f derivabile in x_0, $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right)}{(x-x_0)^1} = 0$$

Dunque $r(x) = P_1(x)$ è il "polinomio di Taylor di ordine 1, relativo ad f, centrato in x_0"

Esempio

Abbiamo provato $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \iff \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$

dunque $\boxed{P_1(x) = x}$ è polinomio di Taylor di ordine 1 centrato in $x_0=0$, relativo a $f = \operatorname{sen} x$

Esempio

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$

dim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{(x-0)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{(x-0)^2} = 0$

quindi $\boxed{P_2(x) = x}$ è polinomio di Taylor di ordine 2, relativo a $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrato in $x_0 = 0$ ///

Teorema (Unicità del polinomio di Taylor)

Sia data $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$, e sia $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x-x_0)^k$ polinomio tale che

$$f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0 \quad (*)$$

Allora $P_n(x)$ è unico

dim

Assurdo $\exists\, Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k (x-x_0)^k \quad Q_n \neq P_n$ t.c.

$$f(x) - Q_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0 \quad (**)$$

$$\Downarrow$$

$(**) - (*)$ $$P_n(x) - Q_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$\boxtimes$ $$\sum_{k=0}^{n} (p_k - q_k)(x-x_0)^k = (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)(x-x_0) + \dots + (p_n - q_n)(x-x_0)^n = o\left((x-x_0)^n\right) \quad x \to x_0$$

se faccio tendere $x \to x_0$ in $\boxtimes$

$$p_0 - q_0 + \emptyset = 0 \implies \boxed{p_0 = q_0}$$

$\Rightarrow \boxtimes$ di sicuro $(x-x_0)\left[(p_1-q_1)+(p_2-q_2)(x-x_0)+\dots+(p_m-q_m)(x-x_0)^{m-1}\right]=o((x-x_0)^m)$ $x\to 0$

equivale a $(p_1-q_1)+(p_2-q_2)(x-x_0)+\dots+(p_m-q_m)(x-x_0)^{m-1}=o((x-x_0)^{m-1})$

se ora mando $x\to x_0$ nell'uguaglianza precedente trovo

$$p_1-q_1+\phi=0 \Rightarrow \boxed{p_1=q_1}$$

procedendo in questo modo, per induzione

$p_2=q_2 \quad p_3=q_3 \quad ---- \quad p_m=q_m \Rightarrow P_m(x)=Q_m(x)$

ovvero il polinomio è unico

Resta il grande problema: come calcolare il polinomio di Taylor relativo ad f centrato in x_0 !!!

Teorema (formula di Taylor con il resto di Peano)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

- f derivabile $(n-1)$ volte per ogni $x\in]a,b[$
- f derivabile n volte in x_0

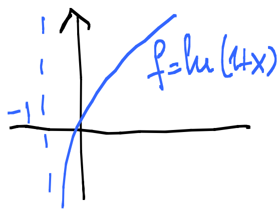
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Allora $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$ per $x\to x_0$

Esempio

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0=0$ di $f(x)=\ln(1+x)$

dim



$f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$

$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$

$f(0) = \ln(1) = 0$

$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

$f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$

$f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$

Allora $P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$

$= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$

$= \cancel{0} + 1\cdot x + \frac{-1}{2}\cdot x^2 + \frac{2}{6}\cdot x^3$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

questo è il polinomio di Taylor, centrato in $x_0 = 0$, di ordine 3, relativo a $f(x) = \ln(1+x)$

dim (formula Taylor)

devo provare che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

$$\begin{cases} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ P_n(x_0) = f(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}\cdot(x-x_0)^{n-2} + \frac{f^{(n)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ P_n'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\ P_n''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

- - -

$$\begin{cases} P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0) \\ P_n^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

$f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0$!!

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-P_n''(x)}{n\cdot(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \left(\frac{0}{0}\right) = \dots \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} =$$

ho applicato $(n-1)$ volte l'Hôspital

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}}_{f^{(n)}(x_0)} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0$$

Esercizio

Calcolare il polinomio di Taylor centrato in
$x_0 = 1$ $(x_0 = 0)$
della funzione $f(x) = e^x$, di ordine 4