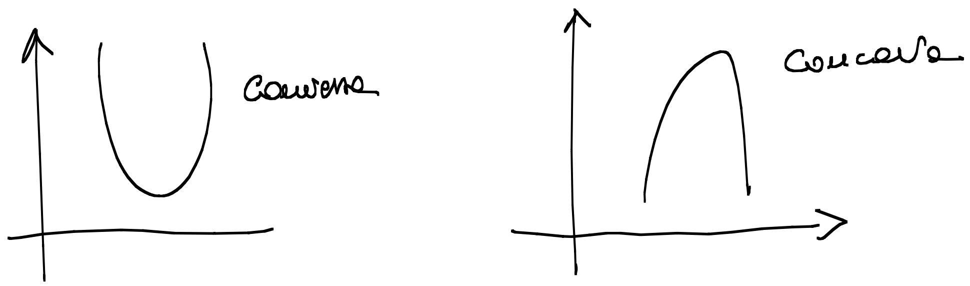
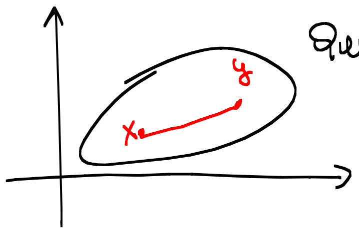


Def: (insieme convesso)

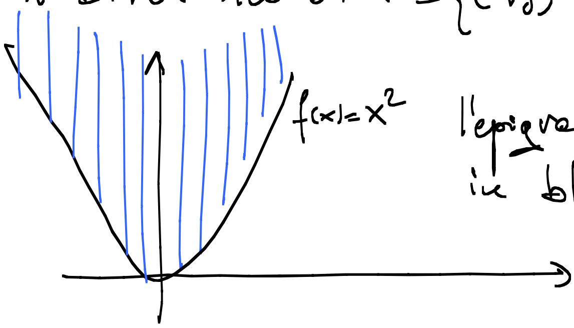
$C\subseteq\mathbb{R}^2$ si dice "convesso" se $C\neq\emptyset$ e se $\forall x,y\in C$, il segmento che congiunge x e y è tutto contenuto in C



Questo è un insieme convesso

Questo insieme NON è convesso

Data $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ I intervallo, si può considerare l'EPIGRAFICO di $f \equiv \{(x,y) : x\in I \ \ f(y)\le y\}$



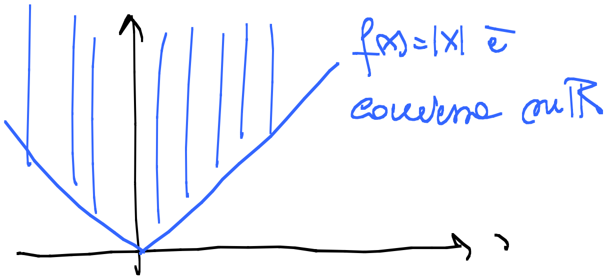
l'epigrafico di $f(x)=x^2$ è l'insieme in blu, e si vede bene che questo insieme è CONVESSO

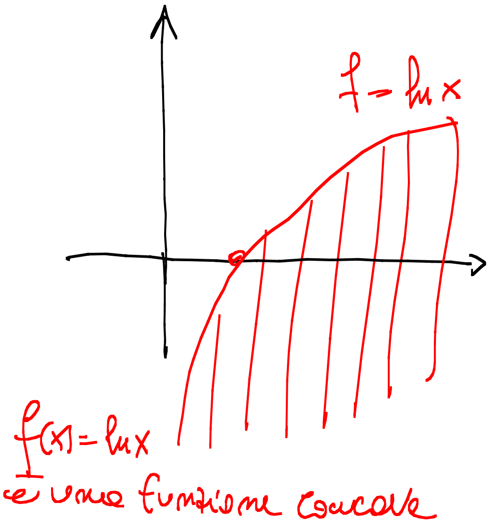
Def $f: I\to\mathbb{R}$ I intervallo, questa si dice CONVESSA se $\{(x,y) : x\in I \ \ f(x)\le y\}$ è CONVESSO

Oss: se l'insieme dei punti che "sta sopra al grafico di f" è convesso allora dico che la funzione è convessa

Def $f: I\to\mathbb{R}$ I intervallo si dice CONCAVA se $-f$ è CONVESSA

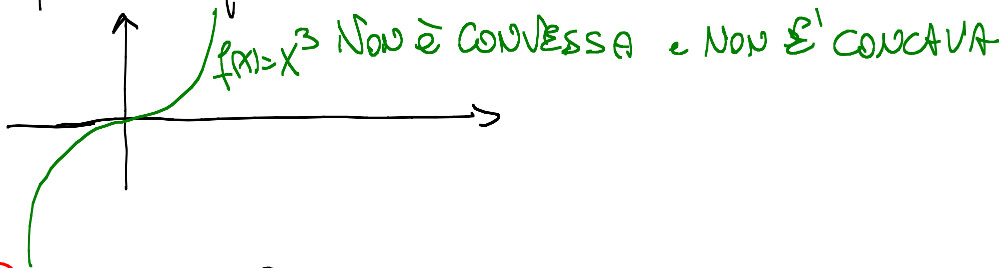
ovvero se l'insieme dei punti $\{(x,y) : x\in I \ \ y\le f(x)\}$ convesso





Oss: esistono funzioni che non sono né convesse né concave (sono la maggioranza!!!)

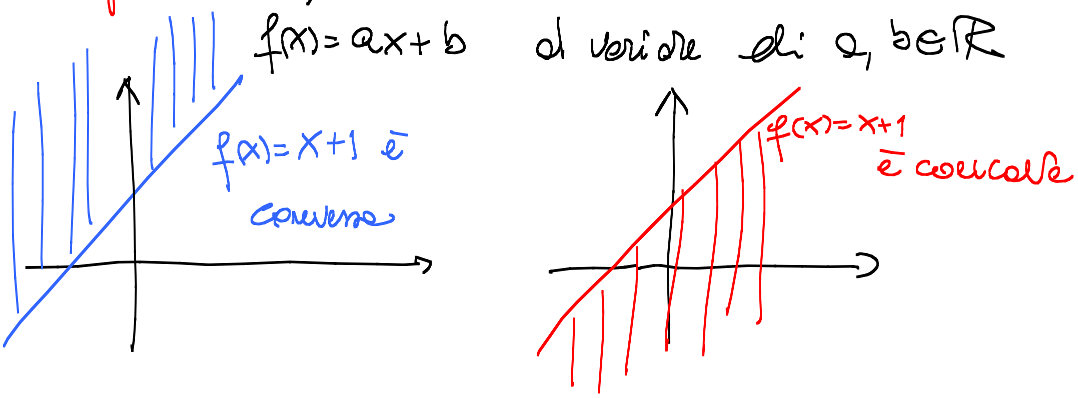
per esempio



Pb: Esistono funzioni che sono sia convesse che concave?

Risposta: sì, tutte le funzioni

$f(x)=ax+b$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$



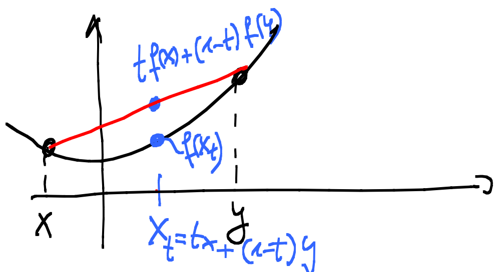
Def (analitica di convessità)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo si dice "convessa su I"

se

$$\forall x,y \in I \quad f(tx+(1-t)y) \le t f(x)+(1-t) f(y) \quad \forall t \in [0,1]$$

La funzione f si dice "concava su I se $-f$ è convessa su I"



Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile 2 volte $\forall x \in I$

i) se $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$ allora f convessa su I

ii) se $f''(x) < 0$ $\forall x \in I$ allora f concava su I

Si osserva che, se $f''(x_0) > 0$, questo significa che

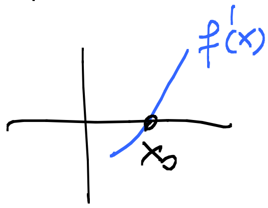
$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

allora $\exists \delta > 0$; $f'(x)$ è crescente strettamente in $]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

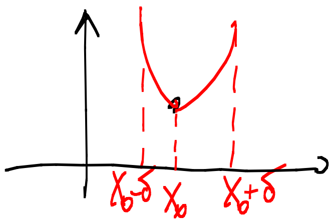
Se inoltre siamo in presenza di un punto stazionario ovvero $f'(x_0)=0$ allora avremo che

f' cresce strettamente in $]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$ e $f'(x_0)=0$

$$\Rightarrow f' \begin{cases} > 0 & x_0 < x < x_0+\delta \\ < 0 & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f \begin{cases} \nearrow & x_0 < x < x_0+\delta \\ \searrow & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$



Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile 2 volte, $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$

i) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è p.to di minimo relativo interno

ii) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ " " " " massimo " "

Def $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte "x_0 è un flesso" se $f''(x_0) = 0$ e f'' "cambia segno"

Esercizio

Sia data la funzione $f(x) = x e^x$. Trovarne
- dominio
- limiti agli estremi
- eventuali asintoti
- regioni di monotonia
- " " concavità/convessità
- max/min relativi

disegnare il grafico. Dire poi quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

dim

$f(x) = xe^x$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ed è continua e derivabile (con derivata continua) infinite volte

LIMITI AGLI ESTREMI

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y \to +\infty} (-y) \cdot e^{-y} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0^-$$

$\frac{y}{e^y} > 0 \ \forall y > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

SEGNO DI $f(x)$

$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$ ed inoltre $x \cdot e^x > 0$ se $x > 0$ ($e^x > 0 \ \forall x$!)

dunque

$$f(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Asintoti

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

essendo poi $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\nexists$ asintoti obliqui

REGIONI DI MONOTONIA (cioè studio $f'(x) \geq 0$!)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot e^x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = 0 \iff e^x \cdot (x+1) = 0 \iff x = -1$$

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < -1 \\ > 0 & \text{se } x > -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ è p.to di minimo assoluto}$$

e ci ho $f(-1) = (-1) \cdot e^{-1} = -1/e = \min f(\mathbb{R})$

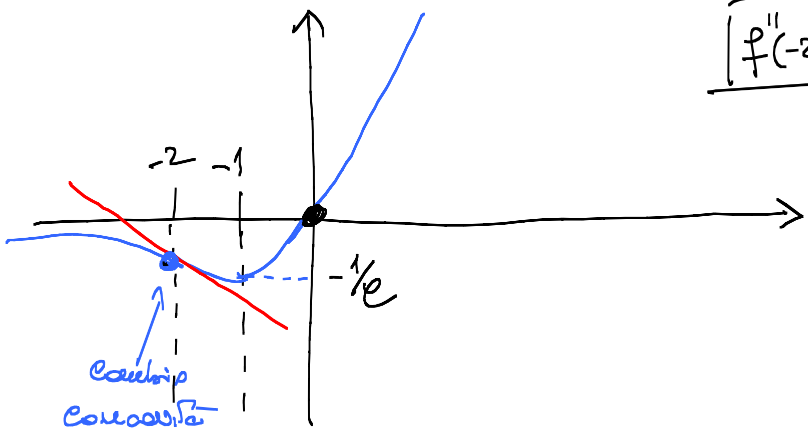
REGIONI DI CONCAVITÀ/CONVESSITÀ

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^x + xe^x\right) = e^x + e^x + xe^x$$

$$= e^x(2+x)$$

$$f''(x) \begin{cases} <0 & \text{se } x<-2 \\ >0 & \text{se } x>-2 \end{cases} \iff f \begin{cases} \text{concava per } x<-2 \\ \text{convessa per } x>2 \end{cases}$$

$$\boxed{f''(-2) = 0}$$



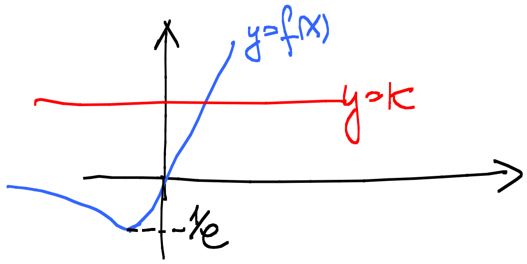
È utile, quando è possibile, calcolare la retta tg al grafico di f in $x=-2$

$$f(-2) = (-2)\cdot e^{-2} = -2/e^2 \qquad f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -1/e^2$$

$$y = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x+2)$$

Voglio conoscere il n.ro di soluzioni di $f(x)=k$ al variare di k. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y=k \\ y=f(x)=xe^x \end{cases}$$

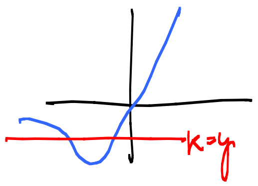


Cercare il n.ro di sol. di $f(x)=k$ equivale a contare gli elementi dell'insieme $f^{-1}(k) = \{x : f(x)=k\}$

$k<-1/e \Rightarrow f^{-1}(k)=\emptyset \Rightarrow f(x)=k$ non ha soluzioni

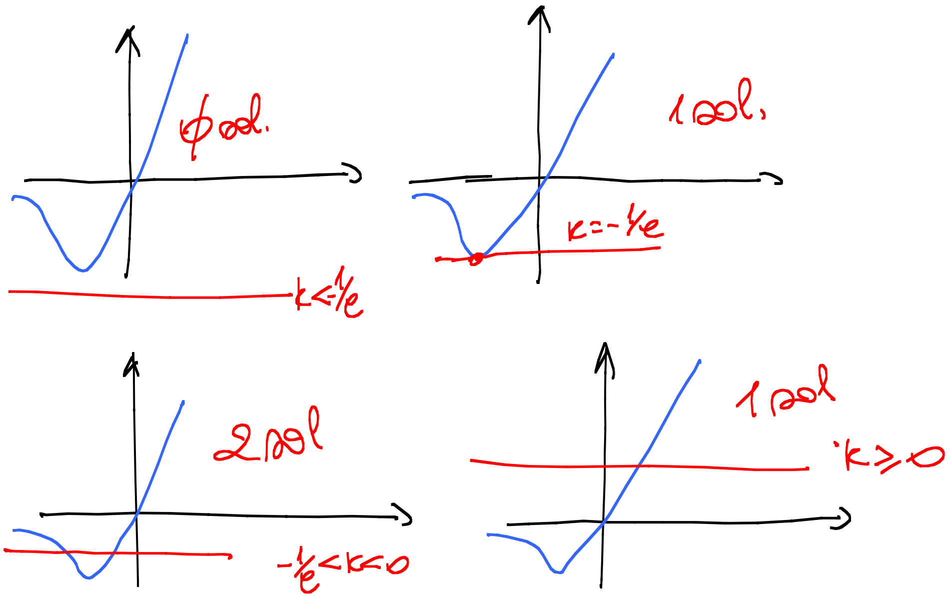
$k=-1/e \Rightarrow f^{-1}(k)=\{-1\} \Rightarrow f(x)=-1/e$ ha 1 ed 1 sola soluz.

$-\frac{1}{e}<k<0 \Rightarrow f^{-1}(k)$ ha due elementi $\Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni



$k=0 \Rightarrow f^{-1}(k)=\{0\}$ ha 1 solo el.to $\Rightarrow f(x)=0$ ha 1 soluzione

$0<k \Rightarrow f^{-1}(k)$ " " " $\Rightarrow f(x)=k$ " 1 soluzione



Esercizio Provare che

$$\operatorname{arctg} x > \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x>0$$

dim

L'idea è: considerare $f(x)=\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$ e dimostrare che $f(x)>0 \ \forall x>0$

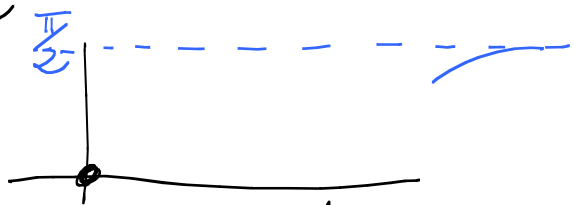
In $x=0$ si ha che $f(0)=\operatorname{arctg}(0)-\frac{0}{1+0^2}=0$

quando $x\to+\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)-\frac{x}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{0+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

Adesso ho scoperto



Se potessi dimostrare che $f'(x)>0 \ \forall x>0$, allora automaticamente $f(x)>f(0)=0 \ \forall x>0$

$f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Dunque $f(0)=0$ & $f'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ è crescente in $]0,+\infty[$ $\Rightarrow f(0) = 0 < f(x) \ \forall x > 0$ ▥

Esercizio

Determinare il numero di soluzioni $\neq$ reali di

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1 = 0$$

dim

Osserviamo che non è richiesto di calcolare esplicitamente ogni soluzione, ma solo di calcolarne il n.ro

Dunque prendo $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists$ una soluzione reale

poiché $f(x)$ è continua!

$f'(x) = x^2+2x-3 = 0$ $\underline{\text{sse}}$ $(x+3)(x-1)=0$

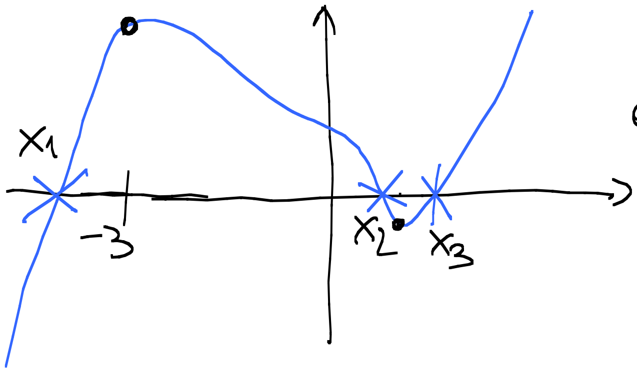
sse $x=-3$ o $x=1$

$$f' \begin{cases} >0 & x<-3 \\ <0 & -3<x<1 \\ >0 & 1<x \end{cases} \Rightarrow f \begin{cases} \nearrow & x<-3 \\ \searrow & -3<x<1 \\ \nearrow & 1<x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=-3$ p.to di massimo relativo

$x=1$ " " minimo "

$f(-3) = \frac{-27}{3} + 9 + 9 + 1 = 10 \qquad f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 1 = -\frac{2}{3}$



esistono 3 radici reali $\neq$, di cui

$x_1 < -3 \quad 0 < x_2 < 1 < x_3$

Teorema (di Cauchy)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

- f, g continue su $[a,b]$
- f, g derivabili su $]a,b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\; : \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

dim

$$F(x) = g(x)\left(f(b)-f(a)\right) - f(x)\left(g(b)-g(a)\right)$$

- $F(x)$ è continua $\forall x \in [a,b]$
- $F(x)$ è derivabile $\forall x \in]a,b[$
- $F(a) = g(a)f(b) - \cancel{g(a)f(a)} - f(a)g(b) + \cancel{f(a)g(a)}$

$\Downarrow$

$F(b) = \cancel{g(b)f(b)} - g(b)f(a) - \cancel{f(b)g(b)} + f(b)g(a)$

$\Rightarrow$ (per il Teorema Rolle applicato a F) $\exists z \in]a,b[\; : \; F'(z) = 0$

ma

$$F'(x) = g'(x)\left(f(b)-f(a)\right) - f'(x)\left(g(b)-g(a)\right)$$

$\Downarrow$

$$F'(z) = 0 = g'(z)\left(f(b)-f(a)\right) - f'(z)\left(g(b)-g(a)\right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$\boxed{///}$

N.B. abbiamo ipotizzato $g'(x) \neq 0 \; \forall x$, ma $g(b) - g(a) \neq 0$?

$$g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a,b[\implies g(b) \neq g(a)$$