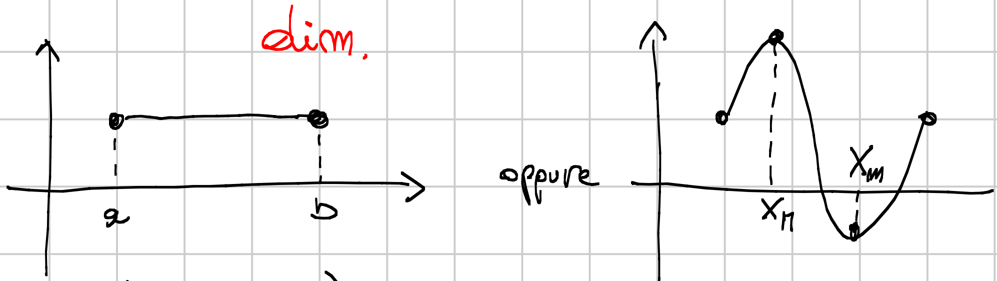
Lemma (fermat)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f continua è derivabile in $x_0 \in I$,
x_0 p.to di massimo (minimo) relativo e interno
Allora $f'(x_0) = 0$

Teorema (di Rolle)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfa alle seguenti ipotesi
i) f continua $\forall x \in [a,b]$
ii) f derivabile $\forall x \in]a,b[$
iii) $f(a) = f(b)$
Allora $\exists z \in]a,b[$ t.c. $f'(z) = 0$

dim.



o (è costante) o (non è costante)

Weierstrass
f è continua su $[a,b]$ chiuso e limitato $\Rightarrow$
esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c. $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ $\forall x \in [a,b]$

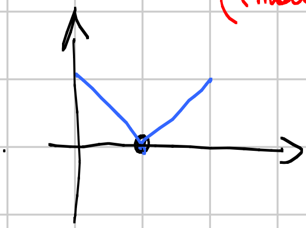
1° caso) $f(a) = f(b) = f(x_m) = f(x_M) \Rightarrow f(x) = \text{cost.}$ $\forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$ $\Rightarrow$ ho trovato ∞ punti
in cui $f' = 0$!! cioè la tesi

2° caso) x_m o $x_M \in]a,b[$: supponiamo che $x_M \in]a,b[$
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : x_M \in]x_M - \delta, x_M + \delta[\subseteq]a,b[$
ed inoltre $f(x) \le f(x_M)$ $\forall x \in]x_M - \delta, x_M + \delta[$
$\Rightarrow x_M$ è un punto di max relativo interno
e
$\exists f'(x_M) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ (Lemma di fermat) $f'(x_M) = 0$ $\boxed{///}$

Controesempi

1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua $\forall x\in[a,b]$
$\cdot\ f(a)=f(b)$ $\quad\not\Rightarrow\quad \exists\, z\in\,]a,b[\,: f'(z)=0$

(manca l'ipotesi di derivabilità!)



$f:[0,2]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=|x-1|$

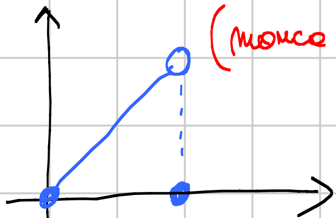
è continua su $[0,2]$

$f(0)=f(2)=1$

però $\nexists\, z:\ f'(z)=0$!!!

2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$
$f(a)=f(b)$ $\quad\not\Rightarrow\quad \exists\, z\in\,]a,b[\,: f'(z)=0$

(manca la continuità in a e in b)



$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$$

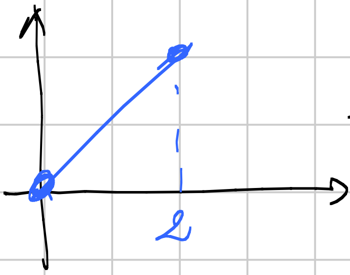
f è derivabile $\forall x\in\,]0,2[$

$f(0)=f(2)=0$

però $\nexists\, z\in\,]0,2[\,:\ f'(z)=0$!!!

3) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$: f continua su $[0,2]$
f derivabile su $]0,2[$ $\quad\not\Rightarrow\quad \exists\, z\in\,]0,2[\,: f'(z)=0$

manca l'ipotesi $f(0)=f(2)$

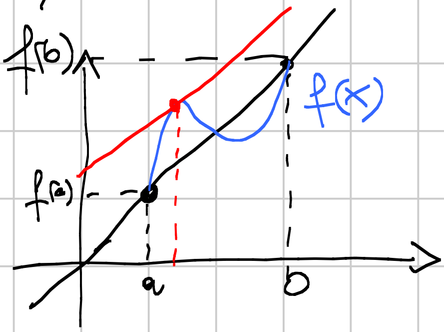


$f(x)=x$ è continua su $[0,2]$

derivabile su $]0,2[$

però $f'(x)=1\neq 0\ \forall x\in\,]0,2[$

Teorema (di Lagrange)



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

i) continua $\forall x\in[a,b]$

ii) derivabile $\forall x\in\,]a,b[$

Allora

$$\exists\, z\in\,]a,b[\ :\ f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dim

Voglio applicare il Teorema di Rolle. A tal fine considero la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$$

$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ è la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

- $g(x)$ è continua su $[a,b]$
  (è differenza di f.ni continue)
- $g(x)$ è derivabile su $]a,b[$
  (è differenza di f.ni derivabili)
- $g(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right] = f(a) - f(a) = 0$

  $\parallel$

  $g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$

Applico Rolle a $g(x)$

$\Longrightarrow$ esiste $z \in]a,b[\; : \; g'(z) = 0$

$$g'(x) = \left[f(x) - f(a) - \overbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}(x-a)\right]' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[: f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

////

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema ($f' = 0$ su intervallo $\Rightarrow f \equiv$ costante)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

Se $f'(x) = 0 \; \forall x \in I$ allora $f(x) = k \; \forall x \in I$ (f costante)

dim

f derivabile su $I \Rightarrow f$ continua $\forall x \in I$

Devo provare che $\forall x, y \in I, x < y$, $f(x) = f(y)$

Presi $x < y$, con $x, y \in I$, considero

$f: [x,y] \to \mathbb{R}$
- continua $\forall t \in [x,y]$
- derivabile $\forall t \in]x,y[$

$\Rightarrow$ (Lagrange) $\exists z \in]x,y[\; : \; f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ma $f'(z) = 0$

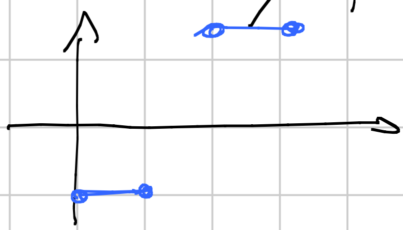
$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0 \quad \text{con } y-x \neq 0 \Rightarrow f(y)=f(x) \quad \text{Tesi} \ \blacksquare$$

Controesempio

$f: I \to \mathbb{R}$, f derivabile su I, I non è intervallo $\not\Rightarrow$ f costante

infatti

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 3 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



non è costante, però $f'(x)=0$

Teorema ($f'>0$ su I intervallo $\Rightarrow f \nearrow$ su I)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ $(<)$ allora f è strett. crescente (decrescente) su I

dim

f derivabile su $I \Rightarrow f$ continua $\forall x \in I$

Devo provare che $\forall x,y \in I \ [x<y \Rightarrow f(x)<f(y)]$

Presi $x<y$, considero

$f: [x,y] \to \mathbb{R}$
- f continua $\forall t \in [x,y]$
- f derivabile $\forall t \in \,]x,y[$

$\Rightarrow$ (Lagrange applicato a $[x,y]$) $\exists z \in \,]x,y[\ : \ f'(z) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

ma $f'(z)>0$

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0 \quad \text{però so che } y-x>0 \Rightarrow f(y)>f(x)$$

ovvero f crescente ovvero la Tesi $\blacksquare$

Esercizio

Dimostrare che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$

dim

$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ continua su $]0,+\infty[$
derivabile " "

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x>0$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{cost} = f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x>0$$

$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ continua su $]-\infty,0[$
derivabile " "

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x<0$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{cost} = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x<0 \quad \blacksquare$$

Def (punto stazionario)

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo $x_0 \in I$ si dice
"punto stazionario per f" se $f'(x_0)=0$

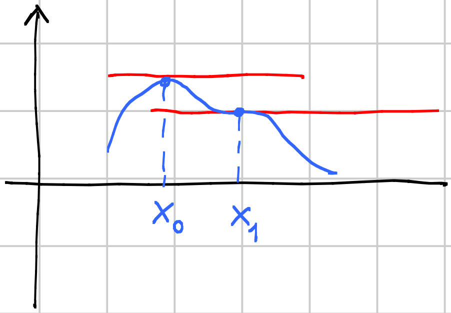
Oss i punti stazionari sono quelli in cui la tangente è orizzontale

Oss se $x_0 \in I$ è p.to di min/max relativo interno per $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 allora $f'(x_0)=0$ cioè x_0 è punto stazionario per f su I

però

se $x_0 \in I$ è p.to stazionario per f su I allora NON È DETTO che x_0 sia un p.to di max/min relativo interno

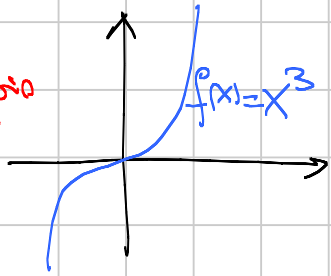
Esempio



x_0 è p.to di max relativo interno

x_1 non è né di max né di min relativo interno

Esempio



$x=0$ non è max né minimo

Ho bisogno di un criterio operativo che mi permetta di distinguere i punti stazionari tra max relativo, minimo relativo, altri punti

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

Sia $x_0 \in I$ un punto stazionario per f $(f'(x_0)=0)$

i) $\exists \delta>0 : f'(x) \begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow$ x_0 è p.to di max relativo interno

ii) $\exists \delta>0 : f'(x) \begin{cases} <0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow$ x_0 è p.to di min relativo interno

iii) $\exists \delta>0 : f'(x)$ non cambia segno in $]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow$ x_0 non è né di max né di min relativo interno

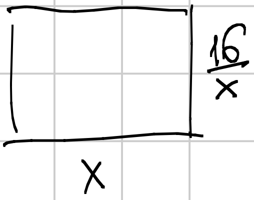
Per dimostrare il Teorema è sufficiente osservare che

$$f' \begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases} \Rightarrow f \begin{cases} \nearrow & \text{in }]x_0-\delta, x_0[\\ \searrow & \text{"} \ ]x_0, x_0+\delta[\end{cases}$$

Esercizio

Tra tutti rettangoli aventi Area $= 16$, determinare il rettangolo avente perimetro minimo

dim



rettangolo di lati x, y t.c.

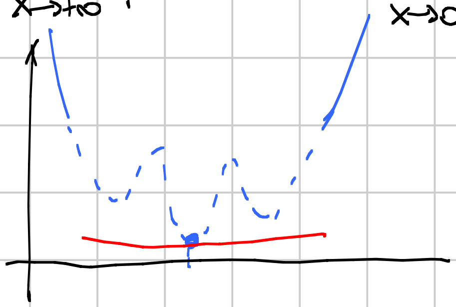
$$x \cdot y = 16 \Rightarrow \boxed{y = \frac{16}{x}}$$

Il perimetro del rettangolo è $f(x) = 2x + 2\frac{16}{x} \overset{!}{=} 2x + \frac{32}{x}$

Voglio studiare $f(x)$ per $x > 0$

$f(x)$ è continua $\forall x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



per un corollario di Weierstrass

$\exists x_m \in]0, +\infty[$ t.c.

$f(x_m) = \min f(]0, +\infty[)$

Chi è x_m ?? Come lo trovo?

Cerco i punti in cui $f'(x) = \left(2x + \frac{32}{x}\right)' = 2 - \frac{32}{x^2} = 0$

(i punti stazionari)

cioè i p.t. t.c. $2 = \frac{32}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

il -4 non interessa, mentre

$\boxed{x = 4}$ è t.c. $f'(x) \begin{cases} < 0 & x \in]0, 4[\\ > 0 & x \in]4, +\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow x = 4$ è p.to di minimo relativo

però è l'unico punto stazionario in $]0, +\infty[$

$\Downarrow$ esiste il minimo assoluto

$\Rightarrow x = 4$ è p.to di minimo assoluto

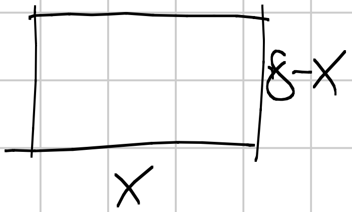
e si ha

$$f(4) = 2 \cdot 4 + \frac{32}{4} = 8 + 8 = 16 = \min f(]0, +\infty[)$$

Esercizio (è lo stesso dato in precedenza)

Tra tutti i rettangoli aventi perimetro fissato $= 16$, determinare il rettangolo avente area massima

dim



$$16 = 2x + 2y \iff x + y = 8$$
$$\iff y = 8 - x$$

L'area di codesto rettangolo è $f(x) = x(8-x) = 8x - x^2$

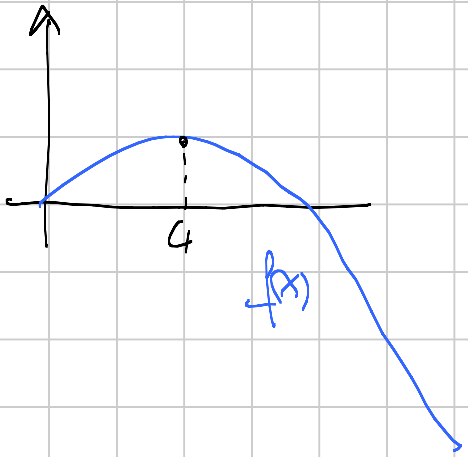
f è continua per $x > 0$

f è derivabile per $x > 0$

$f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 8 - 2x = 0 \iff x = 4$ ovvero $x = 4$ p.to stazionario

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & 0 \le x < 4 \\ < 0 & 4 < x \end{cases} \implies x = 4 \text{ p.to di massimo assoluto}$$



$f(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 16 = \max f([0, +\infty[)$

Abbiamo trovato il quadrato di lato $\boxed{4}$

Esercizio

Il prezzo di una lattina di Coca Cola dipende dalla superficie laterale. La lattina deve contenere 1 lt. di Coca Cola e deve avere forma cilindrica

Determinate R e h che minimizzano il costo della lattina sia minimo