Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 p.d.a. per A

diciamo "derivata di f in x_0" e la indichiamo con

$f'(x_0)$ oppure $Df(x_0)$ oppure $\frac{df}{dx}(x_0)$

il valore del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Quando $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, diciamo che f è derivabile in x_0

Quando f derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$, diciamo

$r(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$ = retta Tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Se la derivata esiste, allora è unica (è un limite)

Se la retta Tg " , " " "

$f(x)=|x|$ non è derivabile in $x_0=0$

$f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$ la derivata di f nel p.to x_0 è $f'(x_0)=n x_0^{(n-1)}$

Come fare per calcolare le derivate?

1° passo è quello di conoscere la derivata
- di una somma
- " un prodotto
- " un quoziente
- " una composizione
- " una inversa

2° passo Costruzione delle derivate delle f.ni elementari

$\operatorname{sen} x$, $\cos x$, x^n, e^x

Teorema (derivata somma, prodotto)

$f,g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A, f e g derivabili in x_0

$\Rightarrow$ i) $(f+g)(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $(f \cdot g)(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

dim

i) $f(x)$ è derivabile in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

$g(x)$ " " " " $\iff g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = (f+g)(x_0) + [f'(x_0) + g'(x_0)](x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

$\iff (f+g)(x)$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) f derivabile in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

g " " " $\iff g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \cdot o(x-x_0)$$

$$+ f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot (x-x_0) + f'(x_0) g'(x_0) \cdot (x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) \cdot o(x-x_0)$$

$$+ g(x_0) \cdot o(x-x_0) + g'(x_0)(x-x_0) \cdot o(x-x_0) + o((x-x_0)^2) \quad x \to x_0$$

$$= (f \cdot g)(x_0) + [f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)](x-x_0) + \boxed{(f(x_0) + g(x_0)) \cdot o(x-x_0)}$$

$$+ \boxed{f'(x_0) \cdot g'(x_0)\, o(x-x_0)} + \boxed{f'(x_0) \cdot o((x-x_0)^2) + g'(x_0) \cdot o((x-x_0)^2) + o((x-x_0)^2)} \quad x \to x_0$$

$$= (f \cdot g)(x_0) + [f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)](x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

$\Downarrow$

$$(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x_0) + [f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)](x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

ovvero $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)$ ▨

$f = o((x-x_0)^2) \Rightarrow f = o(x-x_0)$

Esempi

Calcolare la derivata di $f(x)$ in $x = x_0$ quando

$f = \operatorname{sen} x$, $f = \cos x$, $f = e^x$, $f = \log x$.

dim

$f = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}((x-x_0)+x_0) = \operatorname{sen}(x-x_0)\cos x_0 + \operatorname{sen} x_0 \cos(x-x_0)$

dunque

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0} = \frac{\operatorname{sen}(x-x_0)\cos x_0 + \operatorname{sen} x_0 \cos(x-x_0) - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{\cos x_0 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow x\to x_0 \;\; \cos x_0 \cdot 1} + \underbrace{\operatorname{sen} x_0}_{\downarrow x\to x_0 \;\; \operatorname{sen} x_0} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}}_{\downarrow x\to x_0 \;\; 0}$$

in quanto $\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

dunque $\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x-x_0} = \cos x_0 = f'(x_0)$ $\quad f = \operatorname{sen} x$

$f(x) = \cos x = \cos((x-x_0)+x_0) = \cos(x-x_0)\cos x_0 - \operatorname{sen}(x-x_0)\operatorname{sen} x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\cos(x-x_0)\cos x_0 - \operatorname{sen}(x-x_0)\operatorname{sen} x_0 - \cos x_0}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{\cos x_0 \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}}_{\downarrow x\to x_0 \;\; \cos x_0 \cdot 0} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x-x_0)}{x-x_0} \cdot \operatorname{sen} x_0}_{\downarrow x\to x_0 \;\; 1 \cdot \operatorname{sen} x_0}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = -\operatorname{sen} x_0 = f'(x_0)$ $\quad f(x) = \cos x$

$f = e^x$ $\quad \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} e^{x_0} \cdot 1$

poichè $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

dunque $f'(x_0) = e^{x_0}$ quando $f(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{y=1+x}{=} \lim_{y\to 1} \frac{\ln(y)}{y-1} = 1$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x_0\left(\frac{x}{x_0}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\frac{x}{x_0}-1} \underset{y=\frac{x}{x_0}}{=} \lim_{y\to 1} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln y}{y-1} = \frac{1}{x_0}$$

dunque $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ quando $f(x) = \ln(x)$

Esempio

Calcolare la derivata di $f(x) = x^8$ in 3 modi

$f(x) = x^8$

$f(x) = x^2 \cdot x^6$

$f(x) = x^4 \cdot x^4$

diim

1) $f(x) = x^8$ allora $f'(x_0) = 8 \cdot x_0^{8-1} = 8 \cdot x_0^7$

2) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad h(x) = x^6$

$f'(x_0) = g(x_0) \cdot h'(x_0) + g'(x_0) \cdot h(x_0)$

$= x_0^2 \cdot 6x_0^5 + 2 \cdot x_0 \cdot x_0^6$

$= 8x_0^7$

$g'(x_0) = 2 \cdot x_0^{2-1} = 2x_0$

$h'(x_0) = 6 \cdot x_0^{6-1} = 6x_0^5$

3) $f(x) = g(x) \cdot g(x)$ $\quad g(x) = x^4$ $\quad g'(x_0) = 4 \cdot x_0^{4-1} = 4x_0^3$

$f'(x_0) = g(x_0) \cdot g'(x_0) + g'(x_0) \cdot g(x_0) = x_0^4 \cdot 4 \cdot x_0^3 + 4 \cdot x_0^3 \cdot x_0^4 = 8 \cdot x_0^7$

Esercizio

Calcolare la derivata prima $f'(x)$ in $x=x_0$ quando
$$f(x)=\operatorname{sen}^2(x)+e^x$$

dim

$$(h\cdot h)'(x_0)=\qquad h(x)=\operatorname{sen}x \qquad h'(x_0)=\cos x_0$$
$$=h'(x_0)\cdot h(x_0)+h(x_0)\cdot h'(x_0)$$
$$=\cos x_0\operatorname{sen}(x_0)+\operatorname{sen}(x_0)\cos x_0=2\operatorname{sen}x_0\cos x_0\ \left(=\operatorname{sen}(2x_0)\right)$$

$$g(x)=e^x \qquad g'(x_0)=e^{x_0}$$

$$\Rightarrow f(x)=\operatorname{sen}^2x+e^x \qquad f'(x_0)=2\operatorname{sen}x_0\cos x_0+e^{x_0}$$ ▥

Teorema (derivata di $g\circ f$)

$f: A\to\mathbb{R}$ $\quad g: B\to\mathbb{R}$ $\quad \Omega=f^{-1}(f(A)\cap B)=$ dominio di $g\circ f$

$x_0\in\Omega$ $\quad x_0$ p.d.a. per Ω $\quad f(x_0)$ p.d.a. per B

f è derivabile in x_0

g " " " $y_0=f(x_0)$

allora $(g\circ f)$ è derivabile in x_0 e si ha
$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

dim

f derivabile in $x_0 \iff f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)$ per $x\to x_0$ (*)

g " " $y_0=f(x_0)\iff g(y)=g(y_0)+g'(y_0)\cdot(y-y_0)+o(y-y_0)$ per $y\to y_0$

quando $x\to x_0\Rightarrow f(x)=y\to f(x_0)=y_0$ (*)

$$\Rightarrow g(f(x))=g(f(x_0))+g'(f(x_0))\left[f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)\right]+\underline{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}$$
per $x\to x_0$ **

$$=g(f(x_0))+\underbrace{g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=(g\circ f)(x_0)+g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0)+o(x-x_0) \text{ per } x\to x_0$$

dunque $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$ ▥

** $o\left(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\right)$ per $x\to x_0$

equivale, posto $k=f'(x_0)$ e $y=x-x_0$, a

$$o\left(k\cdot y+o(y)\right) \quad \text{per } y\to 0 \qquad k\in\mathbb{R}$$

$$\| $$

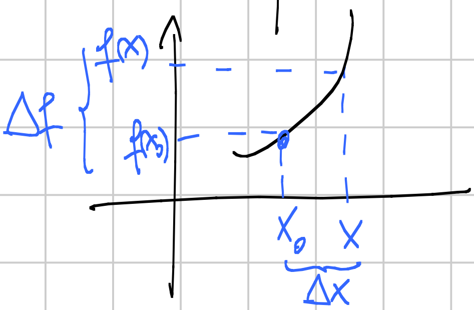
$$(ky+o(y))\cdot o(1) = ky\cdot o(1)+o(y)\cdot o(1) = o(y)+o(y) = 2o(y) = o(y) \quad y\to 0$$

Oss: $\dfrac{d(g\circ f)}{dx}(x_0) = \dfrac{dg}{d\cancel{f}}(f(x_0))\cdot\dfrac{d\cancel{f}}{dx}(x_0) = \dfrac{d\,g\circ f}{dx}(x_0)$

$$\frac{d(h\circ g\circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dh}{d\,g\circ f}(g(f(x_0)))\cdot\frac{dg}{df}(f(x_0))\cdot\frac{df}{dx}(x_0)$$

inoltre

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Esercizio

Calcolare $f'(x_0)$ quando $f(x)=\cos(\operatorname{sen} x)+e^{x^2}$

dim

$g(x)=\cos(\operatorname{sen}(x)) = h(q(x)) \qquad h(y)=\cos y \quad q(x)=\operatorname{sen} x$

$g'(x_0) = h'(q(x_0))\cdot q'(x_0) = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x_0))\cdot\cos(x_0)$

$t(x)=e^{x^2} = u(v(x)) \qquad u(y)=e^y \quad v(x)=x^2$

$t'(x_0) = u'(v(x_0))\cdot v'(x_0) = e^{v(x_0)}\cdot 2\cdot x_0 = e^{x_0^2}\cdot 2x_0$

$$f'(x_0) = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x_0)) \cdot \cos(x_0) + 2x_0 \cdot e^{x_0^2}$$