$o(1)$ per $x\to x_0$ $\equiv \{ f : A \to \mathbb{R}$: A insieme avente x_0 come p.d.a. e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \}$

$\equiv$ f.ni infinitesime per $x \to x_0$

1) $o(1)\cdot o(1) = o(1)$
2) $o(1)\cdot k = o(1)$ $\forall k\neq 0$ $k\in\mathbb{R}$

- $o(g) \underset{\underline{\text{Def}}}{=} o(1)\cdot g$ $\forall g$ infinitesima per $x\to x_0$

- $f = o(g)$ per $x\to x_0$ se $f = g\cdot o(1)$ per $x\to x_0$

- $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x\to x_0 \Rightarrow f = o(h)$ per $x\to x_0$

- $f\cdot o(g) = o(f\cdot g)$ per $x\to x_0$
- $o(o(f)) = o(f)$ per $x\to x_0$
- $o(f)\cdot o(g) = o(f\cdot g)$ per $x\to x_0$

- $o(f + o(f)) = o(f)$ per $x\to x_0$

Ricordiamo che $f = o(g)$ per $x\to x_0 \Rightarrow o(f) + o(g) = o(g)$ per $x\to x_0$
infatti $o(f) + o(g) \underset{f=o(g)}{=} o(o(g)) + o(g) \underset{o(o(g))=o(g)}{=} o(g) + o(g) = 2\,o(g) = o(g)$ per $x\to x_0$

Oss una possibile "interpretazione" di $o(f)$ per $x\to 0$ può essere data da "l'errore che commetto"

ovvero

Supponiamo che $a = 1{,}24 +$ (errore dell'ordine di $\frac{1}{100}$

$$= 1{,}24 \pm \frac{1}{100}$$

$$\Longleftrightarrow \quad]1{,}23; 1{,}25[$$

$$b = 1{,}276 \pm \frac{1}{1000}$$

$$\Downarrow$$

$$a+b = 2{,}51 \pm \frac{1}{100}$$

Adesso

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$g(x) = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$(f+g)(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2) + x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$= 1 + x + x^2 + x + o(x) \qquad \text{però } x^2 = o(x)$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0\right)$$

$$= 1 + 2x + o(x) + o(x)$$

$$= 1 + 2x + 2o(x)$$

$$= 1 + 2x + o(x) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Cosa è successo? $x^2 \curvearrowright o(x)$

$o(x^2) \curvearrowright o(x)$

Oss: $\underbrace{x^2 = o(x)}$ $\quad \underbrace{x^3 = o(x^2)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^3 = o(x)}$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

DERIVAZIONE

Def Data $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\boxed{x_0 \text{ p.d.a. per } A}$

diciamo

"Derivata di f nel punto x_0"

e la indichiamo con $f'(x_0)$ o $Df(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$

il numero (se esiste) uguale al $\boxed{\lim_{x \to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(finito, $+\infty$ o $-\infty$)

ovvero Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}}$, questo limite

è detto "derivata di f in x_0" e si indica $f'(x_0)$

Esempio

Calcoliamo la derivata di $f(x)=x^2$ in $x_0=1$

dim

Usando la definizione, voglio calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x-1=h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

questa è una forma indet. $0/0$

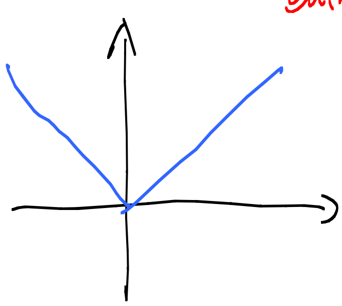
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1}+2h+h^2\cancel{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = 2 = f'(1) = \frac{df}{dx}(1)$$

Controesempio ($\nexists f'(0)$)

Data $f(x)=|x|$, proviamo che $\nexists f'(0)$

dim



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

e dunque $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

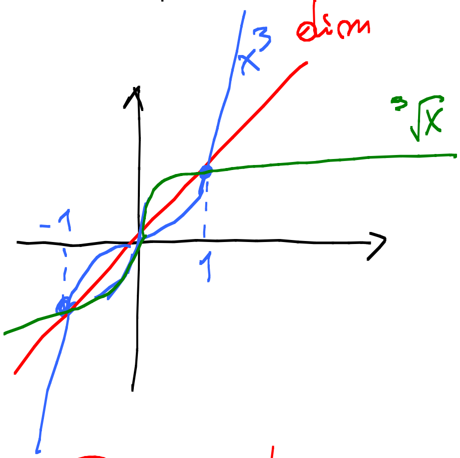
Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

"f è derivabile in x_0" se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Oss: essere derivabile in x_0 per f, significa $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$
f ha derivata in x_0 significa $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$

Oss $f = x^2$ in $x = 1$ è derivabile poiché $f'(1) = 2 \in \mathbb{R}$

Esempio ($\exists$ la derivata ma f non è derivabile in $x=0$)
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha derivata in $x=0$ $\notin \mathbb{R}$



dim

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = +\infty$$

////

Riassumendo

Data $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A si presentano 3 casi

1) $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ non c'è derivata

2) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

in questo caso esiste la derivata $f'(x_0)$

3) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

in questo caso f è derivabile in x_0

Sia f derivabile in x_0, ovvero

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$\Updownarrow$

$0/0$

$$\exists \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] = \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = 0}$$

osservo che

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$ $\quad \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\right] = 0$

$\Updownarrow$

$$\boxed{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0) \quad x\to x_0} \quad **$$

$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) = r(x)$ è una retta con coeff. angolare $m = f'(x_0)$

Def $f: A\to\mathbb{R}$ $x_0\in A$ x_0 p.d.a. per A

f derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)\in\mathbb{R}$

la retta $r(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ è detta "retta Tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$"

** $f(x) - r(x) = o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

ovvero

** $f(x) = r(x) + o(x-x_0)$ $x\to x_0$

"se prendo, per x "vicino a x_0", il grafico di $r(x)$ in luogo del grafico di $f(x)$, commetto un errore che tende a zero più velocemente di $(x-x_0)$ quando $x\to x_0$"

Oss Dire che f ha derivata nel punto $x=x_0$ significa che esiste la retta Tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$

del grafico

Abbiamo visto che f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile in quanto $|x| = f(x)$ non ha derivate in $x_0 = 0$

E il viceversa? il viceversa è vero, cioè

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

dim

f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) = o(x-x_0) \quad x \to x_0$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)$$

$$= \underline{f(x_0)}$$

dunque f continua in x_0 $\blacksquare$

Calcolo la derivata di $f(x) = \text{costante}$

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(\text{costante}) - (\text{costante})}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x-x_0} = 0$$

Calcolo la derivata di $f(x) = ax + b$

ovvero che la retta tg ad una retta $f(x)$ è la retta $f(x)$ stessa

dunque

il coeff. angolare di $f(x)$ dovrà essere la derivata cercata,

infatti $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax + \cancel{b} - ax_0 - \cancel{b}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} a \underbrace{\frac{\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}}_{1} = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad \underset{\uparrow x \neq x_0}{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Calcolo la derivata di $f(x) = x^n$ nel punto x_0 per induzione

$n=1$ nel punto x_0 $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{x^1 - x_0^1}{x - x_0} = 1$

$n=2$ " " " $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = 2x_0$

$n=3$ " " " $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{\cancel{x-x_0}} = 3x_0^2$

- - -

$n =$ nel punto x_0 $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \dots = n \cdot x_0^{n-1}$

Voglio provare che $\lim_{x \to x_0} \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0} = (n+1) \cdot x_0^n$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^n + x^{n-1}x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-1} + x_0^n)}{\cancel{x-x_0}} = (n+1) \cdot x_0^n$$