Teorema (Weierstraß)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ chiuso e limitato, f continua $\forall x\in[a,b]$

$$\Rightarrow \exists x_m, x_M\in[a,b]:$$
$$f(x_m)=\min f([a,b])\le f(x)\le \max f([a,b])=f(x_M)\quad \forall x\in[a,b]$$

Oss quando l'intervallo non è limitato, il Teorema non è, in generale, vero

C'è una versione del Teorema di Weierstrass valida per intervalli illimitati (e/o non chiusi)

Teorema (Corollario di Weierstrass)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua $\forall x\in\mathbb{R}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_m\in\mathbb{R}: f(x_m)=\min f(\mathbb{R})$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \exists x_M\in\mathbb{R}: f(x_M)=\max f(\mathbb{R})$

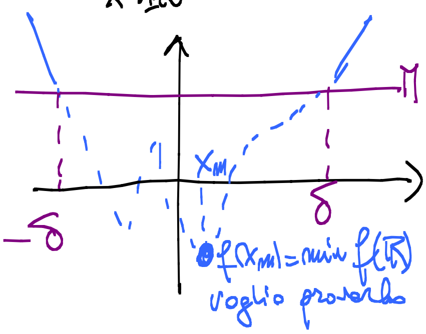
iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ ed esistono $x_0, x_1: f(x_0)>l>f(x_1)$

$$\Rightarrow \exists x_m, x_M\in\mathbb{R}:\quad \min f(\mathbb{R})=f(x_m)\quad \max f(\mathbb{R})=f(x_M)$$

dim

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f=+\infty \iff$

$$\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M)>0:\ \begin{cases} x<-\delta \Rightarrow f(x)>M \\ \delta<x \Rightarrow f(x)>M\end{cases}$$



fissato M, esiste $]-\delta,\delta[$ t.c. $f(x)>M$ $\forall x\notin[-\delta,\delta]$

$\mathbb{R} =]-\infty, -\delta[\cup [-\delta, \delta] \cup [\delta, +\infty[$

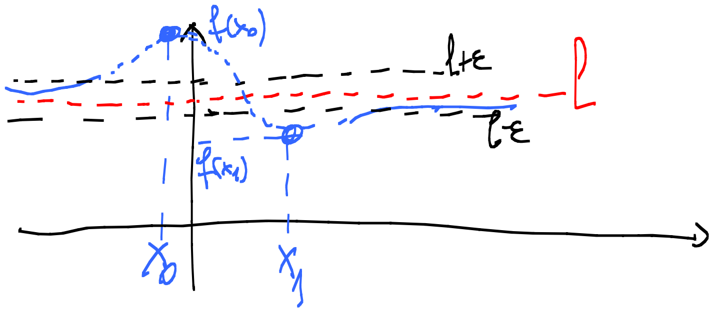
per il Teorema Weierstrass

$f(x) > M \ \forall x < -\delta$ e $M \geq f(x_m) = \min f([-\delta, \delta])$
$f(x) > M \ \forall x > \delta$

$$\Rightarrow \min f(\mathbb{R}) = \min f([-\delta, \delta]) = f(x_m)$$

ii) la dimostrazione identica (invertendo le disuguaglianze) a i)

iii) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \notin [-\delta, \delta] \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$\quad$ '' $\qquad$ '' $\qquad \forall x \notin [-\delta, \delta] \qquad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\mathbb{R} =]-\infty, -\delta[\cup [-\delta, \delta] \cup]\delta, +\infty[$

$f(x) > \ell - \varepsilon, \ \forall x < -\delta \quad f(x) > \ell - \varepsilon, \forall x > \delta$
ed $\exists x_m \in [-\delta, \delta]$ t.c. $\ell > f(x_1) \geq f(x_m) = \min f([-\delta, \delta])$ (per Weierstrass)
e quindi, preso ε t.c. $\ell - \varepsilon > f(x_1)$ si ha
$\min f(\mathbb{R}) = \min f([-\delta, \delta]) = f(x_m)$

Analogamente $f(x) < \ell + \varepsilon \ \forall x < -\delta$, $f(x) < \ell + \varepsilon \ \forall x > \delta$
ed $\exists x_M \in [-\delta, \delta]$ t.c. $f(x_M) = \max f([-\delta, \delta]) \geq f(x_0) > \ell$ (per Weierstrass)
e quindi, preso ε t.c. $f(x_0) > \ell + \varepsilon$ si ha
$\max f(\mathbb{R}) = \max f([-\delta, \delta]) = f(x_M)$ ////

Esercizio

Dire se esistono min e/o max di $f(x) = x^2 + x\log(1+x^2)$ su $\mathbb{R}$

dim

f continua $\forall x \in \mathbb{R}$

inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 + \frac{\log(1+x^2)}{x}\right) = +\infty$

in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log(x^2)} \cdot \frac{\log(x^2)}{x}$

$= 1 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{\log|x|}{x} = 2\cdot 0 = 0$

mi sono ricondotto a $\frac{\log|x|}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ limite notevole

in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \underset{\log x = y}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

o piccolo (Infinitesimi e loro confronto)

Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A diciamo che "f infinitesima per $x \to x_0$"
se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

quando f infinitesima per $x \to x_0$ scriviamo
"$\underbrace{f(x) = o(1; x_0)}_{}$" oppure "$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$"

$f(x)$ è un o piccolo di 1
per $x \to x_0$

Oss
$o(1; x_0) = \{ f: A \to \mathbb{R} \ : \ x_0 \text{ p.d.a. per } A \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \}$

dunque la scrittura corretta sarebbe $f(x) \in o(1)$ per $x \to x_0$
però nella prassi scriviamo $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$

Esempio

$f(x) = x \qquad f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ (infatti $\lim_{x \to 0} x = 0$)

$f(x) = x^3 \qquad f(x) = o(1)$ " $x \to 0$ (infatti $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$)

$f(x) = (x-1) \qquad f(x) = o(1)$ " $x \to 1$ (infatti $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$)

$f(x) = 1/x \qquad f(x) = o(1)$ " $x \to +\infty$ (infatti $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$)

Oss: se considero $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$
allora $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$
$g(x) = o(1)$ per $x \to 0$

inoltre $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \to 0} x^2$

$= 1 \cdot 0 = 0$

ovvero $\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x} = o(1)$ per $x \to 0$

ovvero $\boxed{x^3 \text{ tende a zero "più velocemente" di } \operatorname{sen} x \text{ quando } x \to 0}$

Def (confronto tra infinitesimi)

$f, g : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A $\quad f = o(1)$ e $g = o(1)$ per $x \to x_0$

diciamo che "f è infinitesima di ordine superiore a g per $x \to x_0$"

e scriviamo "$f = o(g)$ per $x \to x_0$"

se

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot o(1) \quad \text{per } x \to x_0} \Longleftrightarrow$$

ovvero $o(g) = g \cdot o(1)$ per $x \to x_0$

ovvero $\exists\, \rho(x) \in o(1)$ t.c. $f(x) = g(x) \cdot \rho(x)$ per $x \to x_0$

Esempio

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0$

$$\Updownarrow$$

$\operatorname{sen} x - x = o(x)$ per $x \to 0$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$

$$\Updownarrow$$

$e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \to 0$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-\cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2) \text{ per } x\to 0$$

Oss: quindi, osservando che $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ per $x\to 0$

$$\operatorname{sen} x - x \lll x$$

$$\uparrow$$

$\operatorname{sen} x - x = o(x)$ per $x \to 0$

Teorema (Transitività)

$f,g,h : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\quad f,g,h = o(1)$ per $x\to x_0$

Se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ per $x\to x_0$ allora $f = o(h)$ per $x\to x_0$

dim

$$\left.\begin{array}{l} f = o(g) = g\cdot o(1) \\ g = o(h) = h\cdot o(1) \end{array}\right\} \text{ per } x\to x_0 \Rightarrow f = [h\cdot o(1)]\cdot o(1) \text{ per } x \to x_0$$

$$= h\cdot o(1)\cdot o(1) \quad ''$$

$$(*) = h\cdot o(1) \quad \text{per } x\to x_0$$

$$\Rightarrow f = o(h) \text{ per } x\to x_0 \qquad \boxed{///}$$

Teorema (Algebra di "o piccolo")

1) $o(1)\cdot o(1) = o(1)$ per $x\to x_0$

2) $k\cdot o(1) = o(1)$ $\quad ''\quad ''$ $\quad \forall k\neq 0$

dim

1) $o(1)\, o(1) \subseteq o(1)$ infatti $f,g\in o(1)$ $x\to x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

$$\Rightarrow f\cdot g \in o(1) \quad x\to x_0$$

$o(1) \subseteq o(1)\cdot o(1)$ infatti $f\in o(1)$ $x\to x_0 \Rightarrow f(x) = f(x)^{1/3}\cdot |f|^{2/3}$

e $f^{1/3} \in o(1)$ e $|f|^{2/3}\in o(1)$ $\quad x\to x_0$

$$\Rightarrow f = f^{1/3}\cdot |f|^{2/3} \in o(1)\cdot o(1) \quad x\to x_0$$

2) $k\, o(1) \subseteq o(1)$ infatti $f\in o(1)$ $x\to x_0 \Rightarrow k\cdot f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$$\Rightarrow k f \in o(1)$$

$o(1) \subseteq k\,o(1)$ infatti $f \in o(1)$ $x \to x_0 \Rightarrow \frac{f}{k} \in o(1)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow f \in k \cdot o(1)$ $x \to x_0$ ▨

Esercizio

1) $f = o(1)$ $x \to x_0$ $\quad o(f) + o(f) = o(f)$ $\quad x \to x_0$
2) " " $\quad o(f) - o(f) = o(f)$ $\quad x \to x_0$
3) $f, g = o(1)$ " $\quad f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ $\quad x \to x_0$
4) $f, g = o(1)$ " $\quad o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ $\quad x \to x_0$
5) $f, g = o(1)$ e $f = o(g)$ $x \to x_0$ $\quad \Rightarrow o(f) + o(g) = o(g)$ $\quad x \to x_0$
6) $f = o(1)$ " $\quad o(o(f)) = o(f)$ $\quad x \to x_0$
7) $f = o(1)$ $x \to x_0$ $\quad \Rightarrow o(f + o(f)) = o(f)$ $\quad x \to x_0$

dim

1) $o(f) + o(f) = 2 \cdot o(f) = 2f\,o(1) = f \cdot o(1) = o(f)$
2) $o(f) - o(f) = o(f) + o(f) = 2f\,o(1) = f \cdot o(1) = o(f)$
3) $f \cdot o(g) = f \cdot g \cdot o(1) = o(fg)$ $\quad x \to x_0$
4) $o(f) \cdot o(g) = f \cdot g \cdot o(1) \cdot o(1) = fg \cdot o(1) = o(f \cdot g)$ $\quad x \to x_0$
5) $o(f) + o(g) = f \cdot o(1) + g \cdot o(1) = o(g) \cdot o(1) + g\,o(1) = g \cdot o(1) \cdot o(1) + g \cdot o(1)$

$= g \cdot o(1) + g\,o(1) = g \cdot 2 \cdot o(1) = g \cdot o(1) = o(g)$ $\quad x \to x_0$

6) $o(o(f)) = o(f) \cdot o(1) = f \cdot o(1) \cdot o(1) = f \cdot o(1) = o(f)$ $\quad x \to x_0$
7) $o(f + o(f)) = (f + o(f))\,o(1) = f \cdot o(1) + f \cdot o(1) \cdot o(1)$

$= f \cdot o(1) + f \cdot o(1) = f \cdot 2 \cdot o(1) = f \cdot o(1) = o(f)$ $\quad x \to x_0$

▨

Teorema (caratterizzazione di $f=o(g)$ per $x\to x_0$)

$f,g: A\to\mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\qquad f,g=o(1)$ per $x\to x_0$

e $g(x)\neq 0\ \forall x\in A\setminus\{x_0\}$

Sono fra loro equivalenti

i) $f=o(g)$ per $x\to x_0$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

dim

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \frac{f(x)}{g(x)}=o(1) \text{ per } x\to x_0 \qquad g(x)\neq 0\ x\neq x_0$$

$$\iff f(x)=g(x)\cdot o(1) \text{ per } x\to x_0$$

$$\iff f(x)=o(g) \text{ per } x\to x_0 \qquad ////$$

Esercizio

$f=1+x^3-x^4+3x^5$

$g=x+2x^2-x^4$

calcolare $\quad f(x)+o(x)=\qquad$ per $x\to 0$

$\qquad g(x)+o(x^2)=\qquad$ "

$\qquad f(x)+o(x^3)=\qquad$ "

dim

$$f(x)+o(x) = 1+x^3-x^4+3x^5+o(x) \qquad x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0$$

$$= 1+o(x)-o(x)+o(x)+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x}=0$$

$$= 1+o(x)+o(x)+o(x)+o(x)$$

$$= 1+4\cdot o(x) \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5}{x}=0$$

poiché x^3, x^4, x^5 sono tutti infinitesimi di ordine maggiore a x

$$g=x+2x^2-x^4$$

$$g(x)+o(x^2) = x+2x^2-x^4+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=0$$

ovvero

$$x^4=o(x^2) \quad x\to 0$$

$$= x+2x^2-o(x^2)+o(x^2)$$

$$= x+2x^2+o(x^2)+o(x^2)$$

$$= x+2x^2+2\cdot o(x^2)$$

$$= x+2x^2+o(x^2) \text{ per } x\to 0$$

Esercizio calcolare

$$\left(1-\cos x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\operatorname{sen} x-x+o(x)\right) \qquad x\to 0$$

dim

$$\left(1-\cos x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\operatorname{sen} x-x+o(x)\right)$$

$$= \underline{\operatorname{sen} x}-\underline{x}+o(x)-\cos x\,\underline{\operatorname{sen} x}+x\underline{\cos x}-\cos x\cdot o(x)$$

$$-\frac{x^2}{2}\underline{\operatorname{sen} x}+\underline{\frac{x^3}{2}}-\frac{x^2}{2}\cdot o(x)+o(x^2)\cdot\operatorname{sen} x-x\cdot o(x^2)+$$

$$+o(x^2)\cdot o(x)$$

$$= \left(\operatorname{sen} x - x - \cos x \operatorname{sen} x + x\cos x - \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} \right)$$

$$+ o(x) + \underbrace{\cos x \, o(x)}_{o(x)} + o(x^3) + \underbrace{\operatorname{sen} x \, o(x^2)}_{\overset{(*)}{=} o(x^3)} + o(x^3) + o(x^3)$$

poiché $\cos x \to 1$

$$= f(x) + \underbrace{2\cdot o(x) + 4\cdot o(x^3)}\; = f(x) + \underbrace{o(x) + o(x^3)}$$

$$= f(x) + o(x) = \operatorname{sen} x - x - \cos x \operatorname{sen} x + x\cos x + o(x) + o(x) + o(x)$$

$$= \operatorname{sen} x - x - \cos x \operatorname{sen} x + x \cos x + o(x)$$

(*) $\operatorname{sen} x \cdot o(x^2) = \operatorname{sen} x \cdot x^2 \cdot o(1)$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot x^3 \cdot o(1)$$

$$= x^3 \cdot o(1) = o(x^3) \qquad x \to 0$$

$f(x) =$ Polinomio $+ o(\;\;)$

$$\operatorname{sen} x = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot x \qquad \text{se}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \frac{x^2}{2} = o(x) \qquad \text{infatti } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \, \frac{x^2}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$