Funzioni Elementari

Polinomi : $a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 = f(x)$
$a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 0, \dots, m$

Funzioni Trigonometriche : $\operatorname{sen} x$, $\cos x$

Funzio esponenziale : e^x

Modulo : $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$

Oss: in campo complesso, le f.ni trigonometriche si possono esprimere attraverso la funzione esponenziale (complessa)

$$\boxed{e^{i\pi} = -1} \qquad i = \sqrt{-1}$$

Dalle funzioni elementari, attraverso le operazioni di

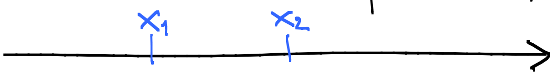
somma : $(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x)$

prodotto : $(f \cdot g)(x) \doteq f(x) \cdot g(x)$

prodotto di composizione : $(f \circ g)(x) \doteq f(g(x))$

La funzione modulo

La distanza tra due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\quad d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



soddisfa tre assiomi

1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y)=0$ sse $x=y$ $\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ |||
2) $d(x,y)=d(y,x)$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ ||| simmetria
3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ $\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

Note: ① Che $d(x,y)\geq 0$ è una richiesta ovvia

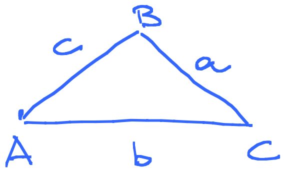
② Che $x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ è una richiesta ovvia

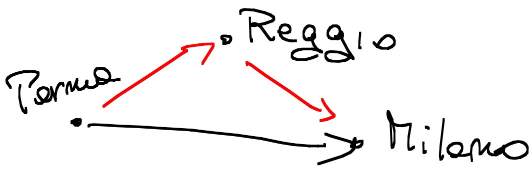
→ ③ Che $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ è una delle proprietà più interessanti

④ La 2) è un requisito ovvio

⑤ La 3) viene detta disuguaglianza triangolare in quanto sancisce che

dato un triangolo di lati BC, CA e AB aventi lunghezze rispettivamente a, b e c si deve avere $a\leq b+c$ e $b\leq a+c$ e $c\leq a+b$





Problema Dati i numeri $a=13$, $b=7$ e $c=5$, esiste triangolo avente come lunghezza dei lati a, b e c?

Diamo la definizione del "modulo di x"

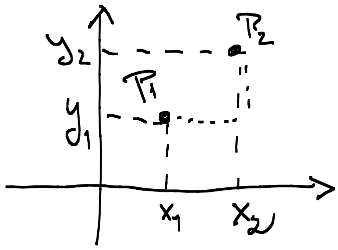
$$|x| \underset{Def}{:=} \max\{x,-x\} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Alle superiori

$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\leq 0\end{cases}$$

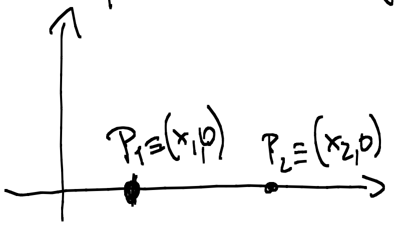
Proveremo più avanti che $d(x,y) \underset{Def}{=} |x-y|$ è una distanza in $\mathbb{R}$

Distanza in $\mathbb{R}^2$



$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Se prendiamo $P_1=(x_1,0)$ e $P_2=(x_2,0)$ si ha



$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|=d(x_1,x_2)$$

In luogo di $|x|=\max\{x,-x\}$ nei testi delle superiori impera la seguente definizione, corretta ma di difficile utilizzo per provare le proprietà della funzione modulo

② $$|x| \underset{\substack{\text{Def} \\ \text{(alternativa)}}}{:=} \begin{cases} x, & \text{se } x>0 \\ -x, & \text{se } x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{se } x>0 \quad (a) \\ 0, & \text{se } x=0 \quad (b) \\ -x, & \text{se } x<0 \quad (c) \end{cases}$$

① $|x| \underset{\text{Def}}{:=} \max\{x,-x\}$ Definizione Nostra

Esempio $|3|=3$ mentre $|-4|=-(-4)=4$

dim dell'equivalenza tra le 2 definizioni

② $\Leftrightarrow$ ①

i) $\underline{x>0}$ e quindi da $|x| \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ trovo $|x|=x$

ma $\max\{x,-x\} \underset{\uparrow x>0}{=} x$ e quindi $\underline{\underline{\text{Ok}}}$

ii) $\underline{x=0}$ da $|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ trovo $|0|=0$

ma $\max\{0,-0\}=0$ e quindi Ok

iii) $x<0$ da $|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ trovo $|x|=-x$

ma $\max\{x,-x\}=-x$ e quindi Ok $\square$

$|x| \underset{\text{Def}}{=} \max\{x,-x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Valore Assoluto (o Modulo) di x

Esempio
$x=4 \qquad \max\{4,-4\}=4=|4|$
$x=-2 \qquad \max\{-2,-(-2)\}=\max\{-2,2\}=2=-(-2)=|-2|$

① $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x>0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Già dimostrate

② $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

③ $|x| = 0$ se e soltanto se, $x=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

④ $|x| = |-x|$ (il modulo è una funzione pari) $\forall x \in \mathbb{R}$

⑤ $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

⑥ $|x| \leq y$ se, e soltanto se, $-y \leq x \leq y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

⑦ $|x| \geq y$ se, e soltanto se, $[(x \geq y) \text{ o } (-x \geq y)] \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

⑧ $|x+y| \leq |x|+|y|$ (disug. Triangolare) $\forall x,y \in \mathbb{R}$

⑨ $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$|x| \underset{Def}{=} \max\{x,-x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Valore Assoluto (o Modulo) di x

Esempio $\quad x = 4 \qquad \max\{4,-4\} = 4 = |4|$

$\qquad\qquad x = -2 \qquad \max\{-2, -(-2)\} = \max\{-2, 2\} = 2 = -(-2) = |-2|$

① $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x \le 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Già dimostrato

② $|x| \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x > 0 \Rightarrow |x| = \max\{x,-x\} = x > 0$

$x = 0 \Rightarrow |0| = \max\{0,-0\} = 0 \ge 0$

$x < 0 \Rightarrow |x| = \max\{x,-x\} = -x > 0$ $\qquad$ ok

③ $|x| = 0$ se e soltanto se, $x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \Rightarrow |x| = \max\{x,-x\} \quad |0| = \max\{0,-0\} = 0$ ✓

devo provare $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

proverò che $\quad x \ne 0 \Rightarrow |x| > 0$

$x \ne 0 \quad$ i) $x > 0 \Rightarrow |x| = \max\{x,-x\} = x > 0$ $\qquad \Rightarrow |x| > 0$

$\qquad\quad$ ii) $x < 0 \Rightarrow |x| = \max\{x,-x\} = -x > 0$ $\qquad$ ok

④ $|x| = |-x|$ (il modulo è una funzione pari) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \max\{x,-x\} = \max\{-x, x\} = \max\{-x, -(-x)\} = |-x| \quad \text{ok}$$

⑤ $-|x| \le x \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostro $x \le |x|$ e $-|x| \le x$

infatti $\quad |x| = \max\{x,-x\} \Rightarrow |x| \ge x$ e $|x| \ge -x$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \ge x \\ |x| \ge -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \ge x \\ -|x| \le x \end{cases} \Rightarrow -|x| \le x \le |x|$$

⑥ $|x| \leq y$ se, e soltanto se, $-y \leq x \leq y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$|x| \leq y \Leftrightarrow \max\{x,-x\} \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ -x \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ x \geq -y \end{cases}$$

$(x \leq y \text{ e } -x \leq y)$

$$\Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$

⑦ $|x| \geq y$ se, e soltanto se, $[(x \geq y) \text{ o } (-x \geq y)] \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq y \Leftrightarrow \max\{x,-x\} \geq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ o } -x \geq y$$

ok

⑧ $|x+y| \leq |x| + |y|$ (disug. triangolare) $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$-|x| \leq x \leq |x|$ per la ⑤

$-|y| \leq y \leq |y|$

$$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y| \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

per la 6 applicata a $x+y$

⑨ $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

per la 8

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |x-y|$$

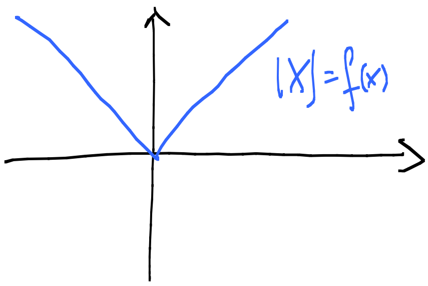
$$\Rightarrow \begin{cases} |x|-|y| \leq |x-y| \\ |x|-|y| \geq -|x-y| \end{cases} \Rightarrow -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

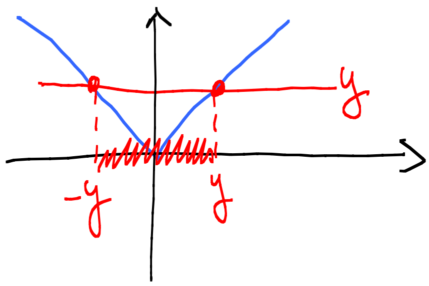
$$\Rightarrow \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

(per la 6)

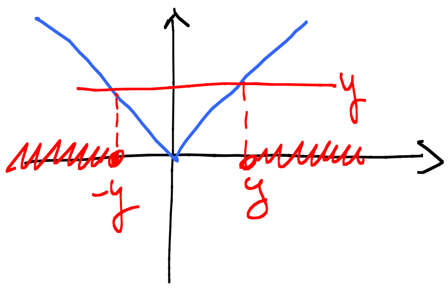
$$|x| \doteq \max\{x,-x\} = \begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$|x|\Big|_{x>0} = x \qquad |x|\Big|_{x<0} = -x$$





$|x| \leq y$



$|x| \geq y$

Esercizio Determinare tutte le soluzioni di

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$

dim

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3>0 \\ x-3 = 2x-3-2 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x-3>0 \\ 2x-3\leq 0 \\ x-3 = -(2x-3)-2 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x-3\leq 0 \\ 2x-3>0 \\ -(x-3) = 2x-3-2 \end{cases}$$

$$\text{ó } \begin{cases} x-3\leq 0 \\ 2x-3\leq 0 \\ -(x-3) = -(2x-3)-2 \end{cases}$$

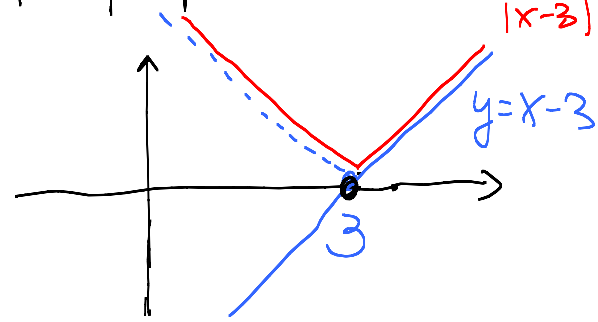
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x>3 \\ x>3/2 \\ x-2=0 \end{cases} \text{ ó } \cancel{\begin{cases} x>3 \\ x\leq 3/2 \\ 3x=4 \end{cases}} \text{ ó } \begin{cases} x\leq 3 \\ x>3/2 \\ 3x=8 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x\leq 3 \\ x\leq 3/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

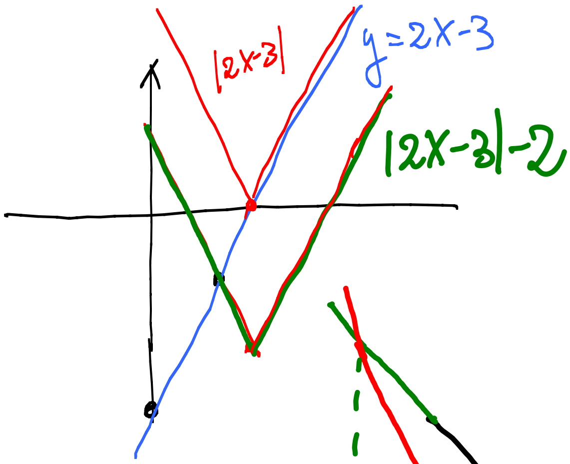
$$\cancel{\begin{cases} x>3 \\ x=2 \end{cases}} \text{ ó } \cancel{\begin{cases} \\ \end{cases}} \text{ ó } \begin{cases} x\in]3/2,3] \\ x=8/3 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x\leq 3/2 \\ x=-2 \end{cases}$$

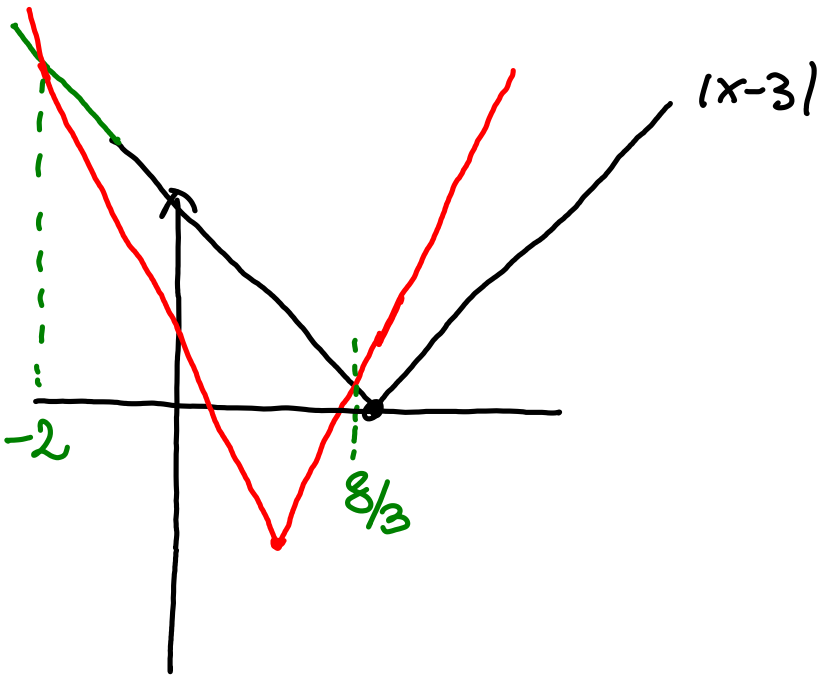
$$|x-3| = |2x-3| - 2$$



$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-3 & \text{se } x > 3 \\ 3-x & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$





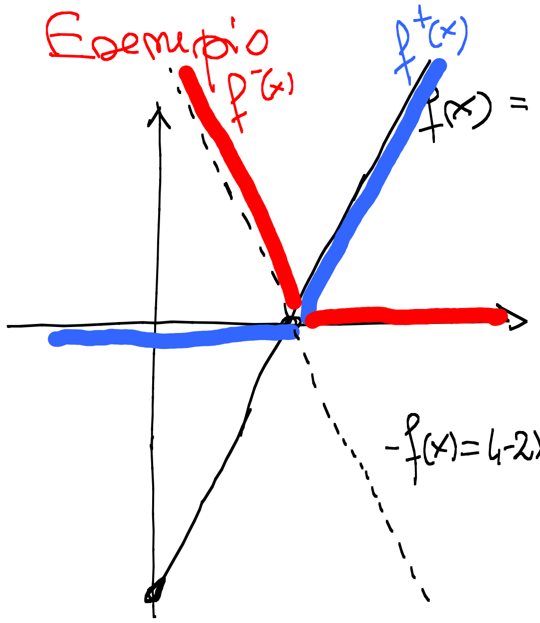
Parte positiva/negativa di $f(x)$

Data $f: A \to \mathbb{R}$ diciamo

Parte positiva di f $\quad f^+(x) = \max\{f(x); 0\}$

Parte negativa di f $\quad f^-(x) = \max\{-f(x); 0\}$

Esempio



$f^+(x) = \max\{f(x);0\}$

$$f^+(x) = \begin{cases} 2x-4, & x>2 \\ 0 & x\leq 2 \end{cases}$$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$

$= \max\{4-2x; 0\}$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0; & x>2 \\ 4-2x; & x\leq 2 \end{cases}$$

$$f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$$

$$f^+(x)+f^-(x) = \begin{cases} 0+(4-2x) & x<2 \\ (2x-4)+0 & x\geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 4-2x & x<2 \\ 2x-4 & x\geq 2 \end{cases}$$

$= |f(x)|$

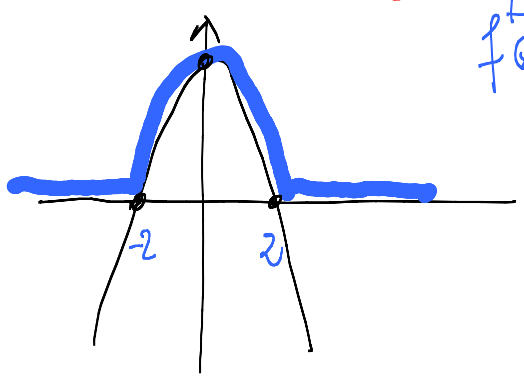
$$f^+(x) - f^-(x) = \begin{cases} 0-(4-2x) & x<2 \\ (2x-4)-0 & x\geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-4 & x<2 \\ 2x-4 & x\geq 2 \end{cases} = 2x-4 = f(x)$$

Esempio

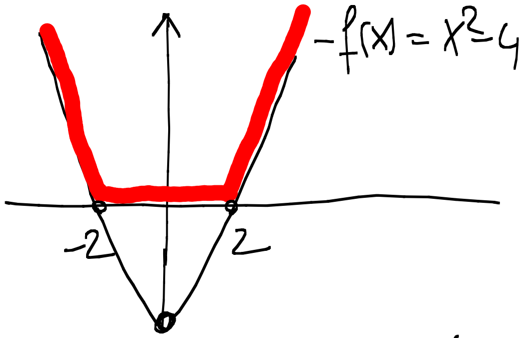
Costruire f^+ ed f^- per la funzione $f = 4-x^2$ (disegnare)

dim

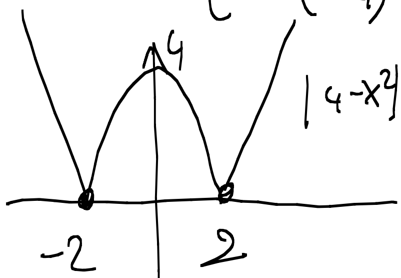


$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} 0 & x\leq -2 \\ 4-x^2 & -2<x<2 \\ 0 & 2\leq x \end{cases}$$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ 10



$$f^+(x) + f^-(x) = \begin{cases} 0 + (x^2-4) & x \le -2 \\ (4-x^2) + 0 & -2 < x < 2 \\ 0 + (x^2-4) & 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} x^2-4 & x \le -2 \\ 4-x^2 & -2 < x < 2 \\ x^2-4 & 2 < x \end{cases}$$



$$f^+(x) - f^-(x) = \begin{cases} 0 - (x^2-4) & x \le -2 \\ (4-x^2) - 0 & -2 < x < 2 \\ 0 - (x^2-4) & 2 \le x \end{cases} = 4 - x^2 = f(x)$$

Provare che

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad \forall x \in D(f)$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ $\left(\begin{matrix} f^+ = \max\{f(x); 0\} \\ f^- = \max\{-f(x), 0\} \end{matrix} \right)$

Esercizio 1.1.1 *Determinare le soluzioni di* $|x-3| = |2x-3| - 2$

Esercizio 1.1.2 *Determinare le soluzioni di* $|x-1| = |x+2| - 1$

Esercizio 1.1.3 *Determinare le soluzioni di* $|2x - |x^2-3|| < 1$

Si possono poi definire

- $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$, la"parte positiva di f" $\quad |f| \geq f$
- $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, la "parte negativa di f" $\quad |f| \geq -f$

Determinare le soluzioni di

$$\left| 2x - |x^2-3| \right| < 1$$