Teorema

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua $\forall x\in[a,b]$; sono equivalenti

1) $f:[a,b]\to f([a,b])$ iniettiva (suriettiva lo è sicuramente)
2) f strettamente monotona

dim

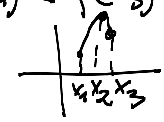
1) $\Leftarrow$ 2) lo avevamo già visto (e non serve continuità)

1) $\Rightarrow$ 2) suppongo che $f(a)<f(b)$ (non è restrittivo)

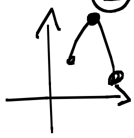
Ipotesi f continua, $f:[a,b]\to f([a,b])$ iniettiva

Tesi f strettamente crescente

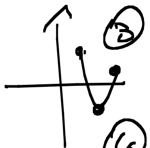
Per assurdo non è vero che f strett. crescente, dunque presi $x_1<x_2<x_3$ si avrà $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ ①



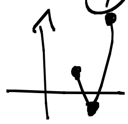
oppure $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$ ②



oppure $f(x_2)<f(x_3)<f(x_1)$ ③



oppure $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ ④



Proviamo che ② porta ad un assurdo

$x_1<x_2<x_3$ e $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$

Considero

$f:[x_2,x_3]\to\mathbb{R}$: continua, $[x_2,x_3]$ intervallo

$\Rightarrow \forall K \quad f(x_3)<K<f(x_2) \quad \exists z_K\in[x_2,x_3] \quad f(z_K)=K$

ma allora, essendo $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$

esiste $z\in[x_2,x_3]$: $f(z)=f(x_1)$ ASSURDO

(poiché f iniettiva)

Analogamente si procede in 1), 3) e 4) e dunque f è strettamente monotona ma $f(a) < f(b) \Rightarrow f$ strett. crescente $\blacksquare$

Teorema (esistenza inversa continua)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f strett. crescente (decrescente), f continua $\forall x \in I$

$\Rightarrow \exists\, f^{-1}: f(I) \to I$ continua, strett. crescente (decrescente)

funzione inversa di I

ovvero $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in I$

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(I)$

dim

$f: I \to f(I)$ è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ esiste $f^{-1}: f(I) \to I$ funzione inversa

($\uparrow$ segue dalla monotonia e continuità)

$+$

$f(I)$ intervallo (Teorema valori intermedi)

$+$

f^{-1} è strett. crescente

Resta da provare che $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua

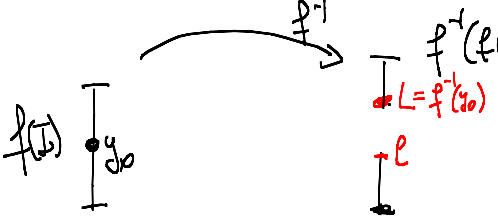
Assurdo $f^{-1}(y)$ sia discontinua in $y_0 \in f(I)$

ricordando che f^{-1} è strett. crescente si ha che

$$\exists \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = l \;\underset{\text{assurdo}}{<}\; \exists \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = L$$

$$l = \sup\{f^{-1}(y) : y \leq y_0\} \qquad L = \inf\{f^{-1}(y) : y_0 \leq y\}$$

suppongo che $l < f^{-1}(y_0) = L$



$f^{-1}(f(I)) = I$

Assurdo poiché I è un intervallo!!!

$\Rightarrow f$ continua

$\blacksquare$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

ANATOCISMO: gli interessi da corrispondere al cliente erano riconosciuti (calcolati) una volta all'anno, mentre gli interessi passivi (da riconoscere alla banca) erano calcolati 3 o più volte

5% Tasso creditore (restituito al cliente)

$$1000€ \text{ 1° gen. 2014} \xrightarrow{T = 1 \text{ anno}} 1000(1+5/100) = 1050€$$

10% Tasso debitore (restituito alla banca)

$$1000€ \xrightarrow{T/3} 1000\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{100}\right) \xrightarrow{T/3} 1000\cdot\left(1+\frac{1}{3}\frac{5}{100}\right)^2 \xrightarrow{T/3} 1000\left(1+\frac{1}{3}\frac{5}{100}\right)^3$$

In generale, se l'interesse è i e ricalcolo m volte

$$1000 \xrightarrow{T/m} 1000\cdot\left(1+i/m\right) \xrightarrow{T/m} 1000\left(1+i/m\right)^2 \xrightarrow{T/m} \cdots \xrightarrow{T/m} 1000\left(1+i/m\right)^m$$

se facciamo tendere $m \to +\infty$ si ha

$$1000\cdot\left(1+i/m\right)^m \longrightarrow 1000\cdot e^i$$

Ad esempio, se $i = 1$ (interesse del 100%) si ha

$$1000\cdot e^1 = 2718,28\ldots > 1000\cdot(1+1) = 2000$$

se calcolo l'interesse ∞ volte

questo se calcolo l'interesse 1 volta sola e si osserva che $e_n(x)$ è strett. crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ per $n > \lfloor x \rfloor + 1$

Oss: se $n > \lfloor x \rfloor + 1$ allora $\left|\frac{n}{x}\right| > \left|\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right| > 1$

allora $\left|\frac{x}{n}\right| < \left|\frac{x}{\lfloor x \rfloor + 1}\right| < 1$

allora $1 + \frac{x}{n} > 0 \quad \forall n > \lfloor x \rfloor + 1$

1) $e^0 = 1 \qquad e_n(0) = \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1^n \longrightarrow 1$

2) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x$

infatti, $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \left|\frac{x}{n}\right| < 1}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x$

applico Bernoulli

$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} e_n(x) = e^x \geq 1 + x$

3) $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ non lo facciamo

4) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

per la 2) $e^x \geq 1+x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$

5) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \quad \forall x>0$

$$\underset{1)}{1 =} e^0 = e^{x-x} \underset{3)}{=} e^x \cdot e^{-x} \underset{6)}{\Rightarrow} e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

6) $e^x > 0 \quad \forall x>0$ segue dalla 2)

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{x}{n} = 1+x \quad \forall x>0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e_n(x) = e^x \geq \underset{\underset{1}{\vee}}{1+x}$

Oss: $e^x > 0 \ \forall x>0 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x} \ \forall x>0 \Rightarrow e^{-x} > 0 \ \forall x>0$
$\Rightarrow e^x > 0 \ \forall x<0$

7) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

infatti $\lim_{x\to-\infty} e^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty} e^{-y} \underset{5)}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} \underset{4)}{=} \frac{1}{+\infty} = 0$

8) $e^x \leq 1 + xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$e^x \geq 1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ è la 2)

$\Rightarrow e^{-x} \geq 1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{e^x} \geq 1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (per la 5))

$\Rightarrow 1 \geq e^x - xe^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow xe^x + 1 \geq e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ che è quanto volevo

9) e^x è strettamente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

Tesi è $\quad x<y \Rightarrow e^x < e^y$

" " $\quad x<y \Rightarrow 1 < e^{y-x}$ $\quad$ (moltiplico per e^{-x} ambo i membri)

$$e^{(y-x)} \underset{\substack{\uparrow \\ 2)}}{\geq} 1+(y-x) \underset{(y-x)>0}{>} 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{ho la Tesi}}}$$

10) e^x è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

1° provo e^x continua in $x=0$

$$1+x \underset{\substack{\uparrow \\ 2)}}{\leq} e^x \underset{8)}{\leq} 1+xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

inoltre $e^x \leq e \quad \forall x<1$ (per la 9), ovvero $e^x \nearrow$)

dunque $\quad 1+x \leq e^x \leq 1+x\cdot e$

$$\downarrow_{x\to 0} \qquad\qquad \downarrow_{x\to 0}$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 = e^0$ per il Teorema Carabinieri

<u>2° passo</u> $\quad \lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^x - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right) \underset{x-x_0=y}{=} \lim_{y\to 0} e^{x_0}\left(e^y - 1\right) = 0$$

ho provato la continuità

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

infatti, $\quad 1+x \leq e^x \leq 1+xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dunque $x \le e^x - 1 \le x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dunque $\begin{cases} 1 \le \dfrac{e^x-1}{x} \le e^x & \forall x>0 \\ 1 \ge \dfrac{e^x-1}{x} \ge e^x & \forall x<0 \end{cases}$

dunque

$$\underbrace{\min\{1,e^x\}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \le \frac{e^x-1}{x} \le \underbrace{\max\{1,e^x\}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \quad \forall x \neq 0$$

dunque $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Riassumendo

$f=e^x \quad f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$, è strett. crescente, è continua $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists f^{-1}(x) = \log_e(x) = \ln(x) \quad f^{-1}:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

è strett. crescente

è continua $\forall x>0$

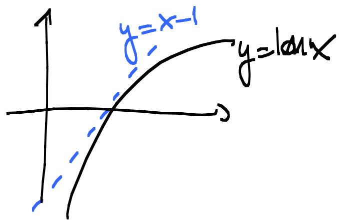
e si ha

$$(f^{-1}\circ f)(x) = \ln(e^x) = x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(f\circ f^{-1})(y) = e^{\ln(y)} = y \quad \forall y>0$$

1) $\ln(1) = 0$ (infatti $e^0 = 1$)

2) $\ln x \le x-1$



$\begin{cases} e^x \ge 1+x \qquad e^x = y \quad x = \ln y \\ y \ge 1+\ln y \\ y-1 \ge \ln y \quad \forall y>0) \end{cases}$

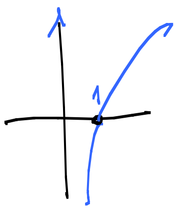
3) $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x,y>0$ $\left(\begin{array}{l} e^{\ln(x\cdot y)} = x\cdot y \\ e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x}\cdot e^{\ln y} = x\cdot y \end{array} \right)$

4) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\left(\text{infatti } \lim_{x\to+\infty} \ln x \underset{x=e^y}{=} \lim_{y\to+\infty} \ln e^y = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty\right)$

5) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \forall x>0$ $\left(\text{infatti } e^{\ln\frac{1}{x}} = 1/x \qquad e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \checkmark\right)$

6) $\ln x \begin{cases} >0 & x>1 \\ <0 & 0<x<1 \end{cases}$

$\Big($infatti $\ln x \nearrow$, $\ln(1)=0 \Rightarrow \ln x > 0 \quad \forall x>1$



$\ln \frac{1}{x} = -\ln(x) > 0 \quad \forall x \in]0,1[$

infatti $x\in]0,1[\Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \ln\frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow \ln(x) = -\ln\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x\in]0,1[\Big)$

7) $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\Big(\ln x = -\ln\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{x\to 0} -\ln\frac{1}{x} \underset{y=1/x}{=} -\lim_{y\to+\infty} y = -\infty\Big)$

8) $\frac{x-1}{x} \le \ln x \quad \forall x>0$ $\Big(e^x \le 1 + x e^x \quad \forall x>0 \Rightarrow$

$0<y=e^x \qquad y \le 1 + y\cdot\ln y$

$y-1 \le y \ln y$

$\frac{y-1}{y} \le \ln y\Big)$

9) $\ln x \nearrow$

10) $\ln x$ è continua $\forall x > 0$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\Big($infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{y=\ln(x+1)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1\Big)$

Esercizio

Calcolare $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

dim

$$(1+x)^{1/x} = e^{\ln(1+x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1} = e \qquad \boxed{///}$$

Esercizio

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

dim

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0} (1+y)^{1/y} = e \qquad \boxed{///}$$

CAMBIAMENTO DI BASE NEI LOGARITMI

Def $\quad x = \log_a y \quad \underline{\Leftrightarrow} \quad y = a^x \qquad \forall a>0 \; a\neq 1$

$\forall y>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$

$\log_a(x)$ che legame ha con $\log_b(x)$ $\qquad a,b>0 \quad a,b\neq 1$

$$\log_a x = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_b(x)\cdot\log_a(b)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \log_b(x)}$$

da queste formule, pongo $x = a$ si trova

$$\frac{1}{\log_a(b)} = \log_b(a) \qquad \text{in quanto } \log_a(a) = 1$$

e dunque partendo da $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$
segue

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \cdot \log_b(x)}$$

$$\log_e 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10}(e)} = \frac{3}{\log_{10} e}$$

$$\Downarrow$$

$$\log_e 1000 \cdot \log_{10} e = 3$$

$$\Downarrow$$

$$\log_e 1000 \cdot \frac{1}{\log_e 10} = 3 \implies \log_e 1000 = 3 \cdot \log_e 10$$ <u>è vero</u>