Teorema (di Bolzano - o di Esistenza degli zeri)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ è un intervallo, f continua $\forall x\in[a,b]$,
$f(a)\cdot f(b)<0$

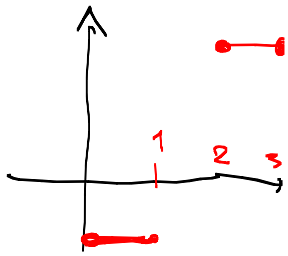
$$\Rightarrow \exists z\in\,]a,b[\ :\ f(z)=0$$

Controesempi

1) $f:[0,1]\cup[2,3]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in[0,1]\\ 2 & x\in[2,3]\end{cases}$

f continua

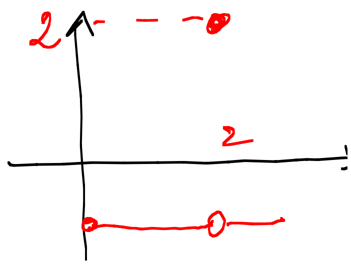
però $\nexists z\in[0,1]\cup[2,3]\ :\ f(z)=0$



2) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in[0,3]\setminus\{2\}\\ 2 & x=2\end{cases}$

f definita su $[0,3]$, $f(0)\cdot f(3)<0$

però $\nexists z\in[0,3]\ :\ f(z)=0$



Esempio (approssimazione di una radice con il metodo di bisezione)

Dire se l'equazione $x^3-3x+1=0$ ammette soluzioni (utilizzando il Teorema di Bolzano) e approssimarne almeno una

dim

Considero $f(x)=x^3-3x+1$ f continua $\forall x\in\mathbb{R}$ inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\tfrac{3}{x^2}+\tfrac{1}{x^3}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty$$

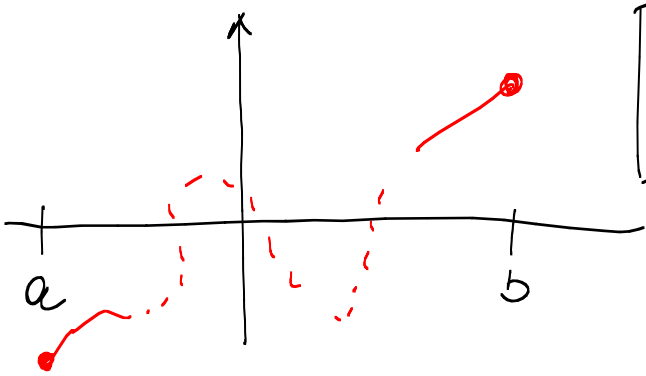
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\tfrac{3}{x^2}+\tfrac{1}{x^3}\right)=-\infty\cdot 1=-\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\forall M>0\ \exists\delta>0\ :\ \begin{cases}x<-\delta \Rightarrow f(x)<-M\\ x>\delta \Rightarrow M<f(x)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\exists\, a<\delta\,,\ b>\delta\ :\ \boxed{f(a)\cdot f(b)<0}$



$\boxed{\begin{array}{c} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ \text{è continua}\end{array}}$

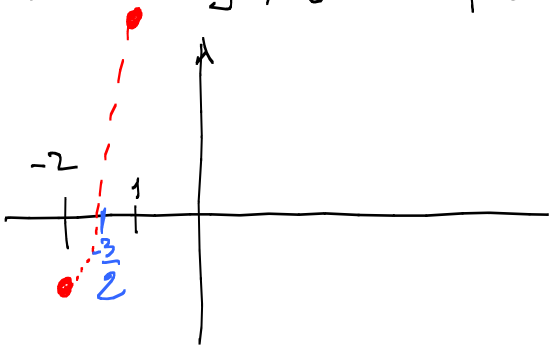
$\Downarrow$ Teorema Bolzano

esiste $z\in\,]a,b[\ :$
$f(z)=0$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=+3>0$$

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-8+6+1=-1<0$$

$$\Rightarrow\ \exists\, z\in\,]-2,-1[\ :\ f(z)=0$$



Al momento so che
$-2<z<-1$

Se voglio migliorare l'approssimazione considero

$$\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2}=\text{punto medio tra }-2\text{ e }-1$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^3-3\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-\frac{27}{8}+\frac{9}{2}+1=\frac{-27+36+8}{8}=\frac{17}{8}>0$$

$\Rightarrow f(-2)\cdot f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$ $\quad f$ continua su $\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$

$$\Rightarrow \underbrace{\exists\, z\in\left]-2,-\tfrac{3}{2}\right[}$$

Ho "migliorato" le mie conoscenze di z soluzione, in quanto adesso so che

$$-2<z<-\frac{3}{2}$$

Se voglio migliorare ancora, prendo

$$\frac{-2-3/2}{2} = -\frac{7}{4}$$

$$f\left(-\frac{7}{4}\right) = \left(-\frac{7}{4}\right)^3 + \frac{21}{4} + 1 = -\frac{7\cdot 49}{64} + \frac{21}{4} + 1$$

una volta

$$= \frac{-7\cdot 49 + 16\cdot 21 + 4\cdot 16}{64}$$

$$= \frac{-7\cdot 49 + 420}{64} > 0$$

$\Rightarrow$ la soluzione cercata sta in $\left]-2, -\frac{7}{4}\right[$

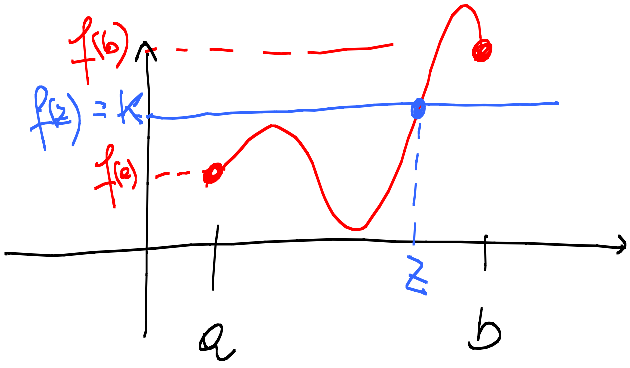
ovvero $\quad -2 < z < -\frac{7}{4}$

- Questo metodo è MOLTO IMPORTANTE perché permette di calcolare esplicitamente una approssimazione della radice
- È semplice da implementare nel computer
- Si può utilizzare per dimostrare il Teorema di Bolzano

Corollario (del Teorema di Bolzano)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f continua in $[a,b]$
e $f(a) < f(b)$ (oppure $f(a) > f(b)$)

$$\Rightarrow \forall K \in \left]f(a), f(b)\right[\quad \exists z \in \left]a,b\right[: f(z) = K$$



dim.

per ipotesi $f(a) < k < f(b)$, f continua su $[a,b]$

$$\Downarrow$$

" " $f(a) - k < 0 < f(b) - k$ f continua su $[a,b]$

posto $g(x) = f(x) - k$ si ha

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua $\forall x \in [a,b]$

$g(a) < 0 < g(b)$

$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\; : \; g(z) = 0$

$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\; : \; f(x) - k = 0$ Tesi $\boxed{///}$

Teorema (dei valori intermedi)

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo , f continua $\forall x \in I$

$\Rightarrow f(I)$ è un intervallo

dim.

Tesi $\forall y_1, y_2 \in f(I)$ $y_1 < y_2 \Rightarrow [y_1, y_2] \subseteq f(I)$

Prendo $y_1, y_2 \in f(I)$ con $y_1 < y_2$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1$ $f(x_2) = y_2$

supponiamo che $x_1 < x_2$ (se $x_1 > x_2$ si procede analogamente)

Siamo nella situazione

$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$

Preso comunque $k : f(x_1) = y_1 < k < y_2 = f(x_2)$

essendo f continua su $[x_1, x_2] \subseteq I$

$\Rightarrow \exists z \in]x_1, x_2[\; : \; f(z) = k$

$\Rightarrow \quad [y_1, y_2] \subseteq f(I)$

Teorema (di Weierstrass)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \quad \exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$\min f([a,b]) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = \max f([a,b]) \quad \forall x \in [a,b]$$

Oss: f continua su $[a,b]$ chiuso e limitato allora $\exists$ min ed il max di $f([a,b])$

dim

$f([a,b]) \equiv$ l'immagine di f $\qquad f([a,b]) \neq \emptyset$ poiché $[a,b] \neq \emptyset$

Essendo $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ e $f([a,b]) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup f([a,b]) = \Lambda$
$\inf f([a,b]) = \lambda$

(Non so ancora se $\Lambda < +\infty$ e $\lambda > -\infty$
" " " " $\Lambda \in f([a,b])$, $\lambda \in f([a,b])$)

- Proviamo che $\Lambda \in f([a,b])$ ovvero $\Lambda = \max f([a,b])$

se $\Lambda = +\infty$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in [a,b] : \; n < f(x_n)$

allora $\boxed{\exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \; : \; \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty = \Lambda}$

se $\Lambda \in \mathbb{R}$ allora $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in [a,b] : \Lambda - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \Lambda$

allora $\boxed{\exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \; : \; \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \Lambda}$

$\{x_n\} \subseteq [a,b]$, cioè è limitata $\overset{\text{(Bolzano Weierstrass)}}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}$ sottosuccessione convergente, cioè $\lim_{n \to +\infty} x_{k_n} = x_M$

Allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua in } x_\pi}}{=} f\left(\lim_{n\to+\infty} x_{k_n}\right) = f(x_\pi)$ (A)

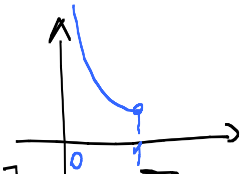
Però $\{f(x_{k_n})\} \subseteq \{f(x_n)\}$ $\quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \Lambda$ (B)

è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$

$$\Rightarrow f(x_\pi) = \Lambda = \max f([a,b])$$

Analogamente si dimostra $\lambda = \min f([a,b]) = f(x_m)$

Controesempio



1) $f(x) = 1/x$ $\quad f:]0,1]$ questa è continua su $]0,1]$ ma $\nexists \max f(]0,1])$ in quanto $\sup f(]0,1]) = \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

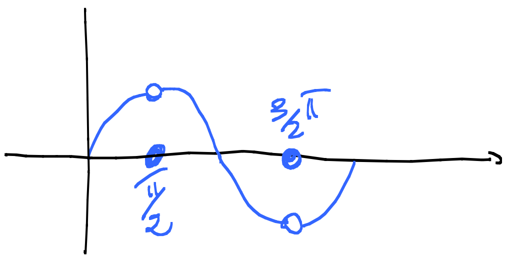
Non soddisfa Weierstrass poiché $]0,1]$ è limitato ma NON È chiuso

2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0,2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\} \\ 0 & x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

continua su $[0,2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ (in quanto $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$ $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x = -1$)

e non soddisfa il Teorema di Weierstrass poiché

$\sup \operatorname{sen}([0,2\pi]) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad \inf \operatorname{sen}([0,2\pi]) = \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$



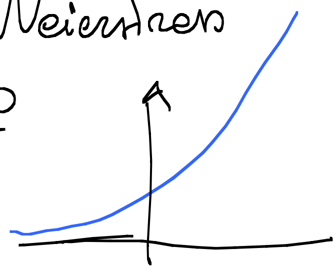
Il problema di questa f.ne è che è discontinua in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ e quindi non soddisfa Weierstrass

3) $f(x) = e^x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad e^x \nearrow$

$\Rightarrow \inf e^{\mathbb{R}} = 0$ $\quad \sup e^{\mathbb{R}} = +\infty$

e non sono, rispettivamente, ne min ne max anche se e^x è continua su tutto $\mathbb{R}$

Non è soddisfatto il Teorema Weierstrass poiché $\mathbb{R}$ non è limitato (però è chiuso)



Corollario (del Teorema Weierstrass e del Teorema Valori Interm.)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ f continua su $[a,b]$ chiuso e limitato

$$\Rightarrow f([a,b]) = \left[\min f([a,b]),\ \max f([a,b])\right]$$

Dim

Per il Teorema di Weierstrass $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_m)=\min f([a,b]) \le f(x) \le \max f([a,b]) = f(x_M)$$

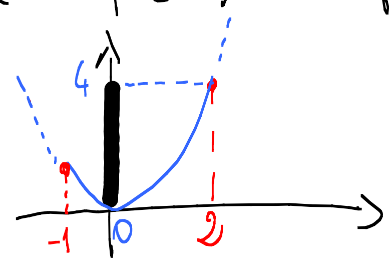
inoltre $f([a,b])$ = intervallo per il Teorema dei Valori intermedi

$$\Rightarrow f([a,b]) = \left[\min f([a,b]),\ \max f([a,b])\right]$$ ///

Esempio $f(x) = x^2$ $f: [-1,2]\to\mathbb{R}$

si ha che $f([-1,2]) = [0,4]$ infatti

$\min f([-1,2]) = 0 = f(0)$ $f(2) = 4 = \max f([-1,2])$



Oss: se fosse possibile disegnare il grafico di una qualsiasi funzione, risulterebbe evidente chi sia il min $f([a,b])$ e il max $f([a,b])$

però

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(2+\operatorname{sen}^3 x\right)\right) \qquad x \in [-\sqrt{3}, 4\pi]$$

Senza disegnare nulla, osservo che f è continua poiché è composizione di f.ni continue

$[-\sqrt{3}, 4\pi]$ è limitato e chiuso e intervallo

$\Rightarrow$ Vale Tesi Teorema di Weierstrass

Oss: per le funzioni continue

- vale Teorema permanenza segno
- " " locale limitatezza
- " " algebrico: somma, prodotto e quoziente di funzioni continue è continuo
- " " continuità per successioni

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A allora sono equivalenti:

1) f continua in x_0

2) $\forall \{x_n\} \subseteq A$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

- Vale il Teorema della composizione

Teorema (composizione di f.ni continue è continua)

$f: A \to \mathbb{R}$ $g: B \to \mathbb{R}$ $\Omega = f^{-1}(f(A) \cap B)$

f continua in $x_0 \in \Omega$

g " " $y_0 \in f(A) \cap B$ $y_0 = f(x_0)$

allora $(g \circ f): \Omega \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

e si ha $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$

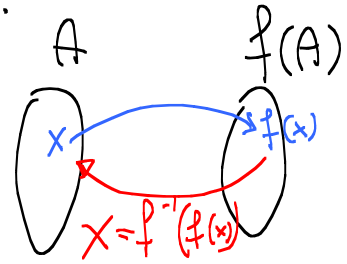
FUNZIONI INVERSE

Def $f: A \to f(A)$ iniettiva, diciamo "inversa di f"

la funzione $f^{-1}: f(A) \to A$ t.c.

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in f(A)$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$



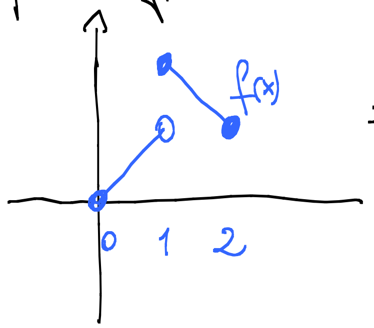
Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f monotona crescente (decrescente) strettamente

$\Rightarrow f: I \to f(I)$ è iniettiva

però

$f: I \to f(I)$ I intervallo f iniettiva $\not\Rightarrow$ f monotona



$$f = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Con la continuità le cose si aggiustano

Teorema (f continua su intervallo $\Rightarrow$ (monotonia stretta $\Leftrightarrow$ iniettività))

$f: I \to \mathbb{R}$ $I=[a,b]$ intervallo, f continua $\forall x \in I=[a,b]$

allora sono equivalenti

1) $f: I \to f(I)$ strettamente monotona

2) $f: I \to f(I)$ iniettiva

dim

1) $\Rightarrow$ 2) lo sapevo già ed è vero anche se f non è continua

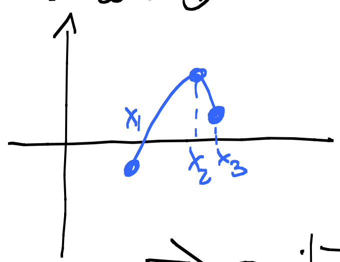
$2) \Rightarrow 1)$ Supponiamo $f(a) < f(b)$ $\quad I = [a,b]$ (altrimenti applico Teorema a $-f$)

Ipotesi $\equiv$ f continua da $[a,b]$ intervallo in $f([a,b])$
f iniettiva

Tesi $\equiv$ f strettamente crescente su $[a,b]$
ovvero
$\forall x, y \in [a,b]\ x \neq y \qquad f(x) < f(y)$

per assurdo la tesi sia falsa, cioè $\exists x_1, x_2, x_3$ t.c.
$x_1 < x_2 < x_3$ e $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ ①
or
$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$ ②
or
$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ ③
or
$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$ ④

Nel caso ①



$f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ continua
$f(x_1) < f(x_2)$
$[x_1, x_2]$ intervallo

$\Rightarrow$ per il Teorema dei valori intermedi $\forall k \in [f(x_1), f(x_2)]$

$\exists z_k \in [x_1, x_2] : f(z_k) = k$

e dunque, essendo $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$
esiste $z \in]x_1, x_2[: f(x_3) = f(z)$ Assurdo

(f iniettiva : $z \neq x_3 \Rightarrow f(z) \neq f(x_3)$) .

Analogamente si arriva ad un assurdo nei casi ②, ③ e ④

Dunque f è strettamente monotona, ed essendo
$f(a) < f(b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente $\blacksquare$